UITWERKING 1E DEELTENTAMEN CONTINUE WISKUNDE
20-10-2014

(1) $f(x)=\sqrt[3]{e^{\sin x}+1}$, $f'(x)=\frac{1}{3}(e^{\sin x}+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(e^{\sin x}+1)'$
$=\frac{1}{3}(e^{\sin x}+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot e^{\sin x}\cdot\cos x$

$g(x)=\dfrac{1+\ln x}{1+x^2}$, $g'(x)=\dfrac{(1+x^2)\cdot\frac{1}{x}-(1+\ln x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$.

(2) a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{\sin\pi x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2(x-\frac{1}{2})}{\pi\cos\pi x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2}{-\pi^2\sin\pi x}=\boxed{\dfrac{-2}{\pi^2}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x+2^x}{3^x+100x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^x}_{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{100x}{3^x}}_{\to 0}}=\dfrac{1}{1}=\boxed{1}$

(3) $\lim\limits_{x\downarrow 0}f_c(x)=\lim\limits_{x\downarrow 0}c^2\sqrt[3]{x+8}=c^2\sqrt[3]{8}=2c^2$

$\lim\limits_{x\uparrow 0}f_c(x)=\lim\limits_{x\uparrow 0}(2c)^{x+1}=2c$

Dus $\lim\limits_{x\to 0}f_c(x)$ bestaat $\Leftrightarrow 2c^2=2c\Leftrightarrow 2(c^2-c)=0\Leftrightarrow\boxed{c=0 \text{ of } c=1}$

$f_c(x)$ is continu in $x=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}f_c(x)$ bestaat en is gelijk aan $f_c(0)=2$.

Dit kan alleen als $\boxed{c=1}$

(4) a) $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$
Als $x=a$ met a een geheel getal een nulpunt is van f, dan is a een deler van 2.
Dit geeft als mogelijkheden $a=1,-1,2,-2$.

a	$f(a)$
1	2
-1	-18
2	0
-2	-52

Dus $f(x)$ heeft nulpunt 2

$$x-2 \,/\, x^3-6x^2+9x-2 \,\backslash\, x^2-4x+1$$
$$x^3-2x^2$$
$$-4x^2+9x-2$$
$$-4x^2+8x$$
$$x-2$$
$$x-2$$
$$0$$

$x^3-6x^2+9x-2=(x-2)(x^2-4x+1)$

De andere nulpunten van f zijn de nulpunten van x^2-4x+1, dat zijn $\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

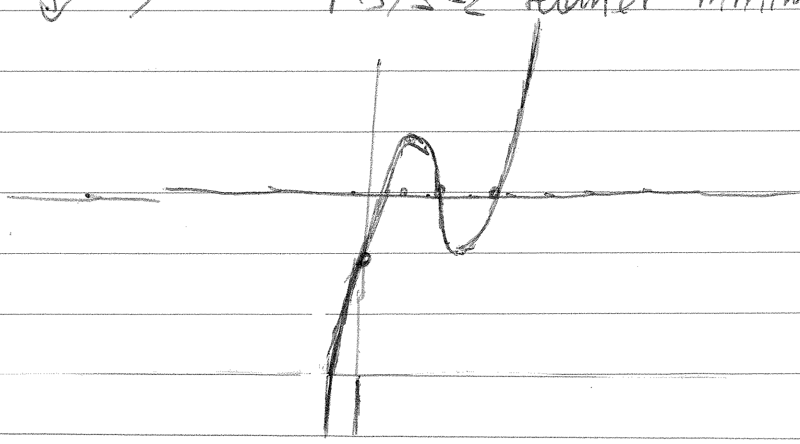
De nulpunten van $f(x)$ zijn $\boxed{2,\ 2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}}$

$2+\sqrt{3}\approx 3{,}7$
$2-\sqrt{3}\approx 0{,}3$

b) $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$

f'	+	0	−	0	+
f	↗	1	↘	3	↗

$f(1)=2$ relatief maximum want $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$
$f(3)=-2$ relatief minimum want $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



5 a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(4)$	$f^{(n)}(4)/n!$
0	$x^{-1/2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$-\frac{1}{2}x^{-3/2}$	$-\frac{1}{2}\times 4^{-3/2} = -\frac{1}{2}\times 2^{-3} = -\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$
2	$\frac{3}{4}x^{-5/2}$	$\frac{3}{4}\times 2^{-5} = 3\times 2^{-7} = \frac{3}{128}$	$\frac{3}{256}$
3	$-\frac{15}{8}x^{-7/2}$		

$$P_2(x) = f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4) + \frac{f^{(2)}(4)}{2!}(x-4)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x-4) + \frac{3}{256}(x-4)^2$$

$$E_2(x) = \frac{f^{(3)}(s)}{3!}(x-4)^3 = -\frac{15}{48}s^{-7/2}(x-4)^3$$

b) $|E_2(4{,}01)| = \left|\frac{15}{48}s^{-7/2}(4{,}01-4)^3\right| \leq \frac{15}{48}\times 4^{-7/2}(0{,}01)^3$

$= \frac{15}{48}\times 2^{-7}\, 10^{-6} < 10^{-8}$.

6 $f(x) = \dfrac{x^4+4}{x^3-2x^2}$

a) f heeft verticale asymptoten waar de teller $\neq 0$ is en noemer 0 is. De noemer is $x^2(x-2)=0$ voor $x=0$ of $x=2$

$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = -\infty$ (teller >0, noemer <0 als $x\downarrow 0$)

$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -\infty$ (teller >0, noemer <0 als $x\uparrow 0$)

$\lim_{x\downarrow 2} f(x) = \infty$ (teller >0, noemer >0 als $x\downarrow 2$)

$\lim_{x\uparrow 2} f(x) = -\infty$ (teller >0, noemer <0 als $x\uparrow 2$)

6 b) $x^3-2x^2 \,/\, x^4+1 \,\backslash\, x+2$

x^4-2x^3 −

$2x^3+1$

$2x^3-4x^2$ −

$4x^2+1$.

$x^4+1 = (x+2)(x^3-2x^2)+4x^2+1$, $\frac{x^4+1}{x^3-2x^2} = x+2+\frac{4x^2+1}{x^3-2x^2}$

$\boxed{y=x+2}$ is een schuine asymptoot voor $f(x)$ zowel voor $x\to-\infty$ als $x\to-\infty$ omdat

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^3-2x^2}-(x+2)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2+1}{x^3-2x^2}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x}}=0.$$