

TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE

HELE STOF

16 januari 2015, 14:00-17:00

- Op de achterzijde staan vijf opgaven; verder is er een lijstje met formules.
 - Het gebruik van grafische of programmeerbare rekenmachines is niet toegestaan.
 - Motiveer elk antwoord d.m.v. een berekening of redenering.
 - Vul op elk tentamenpapier **duidelijk leesbaar** je naam en collegekaartnummer in.
 - Het cijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 8.
-

10 1. Bereken $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{x^2}$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 3^x}{4^x + 2^x}$.

2. Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & (x > 0), \\ d & (x = 0), \\ \frac{\ln(x^2 + c)}{\ln(x^2 + 2)} & (x < 0), \end{cases}$$

waarbij c, d reële getallen zijn met $c > 0$.

5 a) Bepaal c zodat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ bestaat.

5 b) Bepaal d zodat $f(x)$ continu is in $x = 0$.

5 3.a) Bepaal het 3e Taylorpolynoom $P_3(x)$ van $\ln(1+x)$ rond $x = 0$.

2 b) Geef een uitdrukking voor de foutterm $E_3(x)$.

3 c) Als we $\ln(1,01)$ benaderen door $P_3(0,01)$ maken we een fout $E_3(0,01)$. Laat zien dat $|E_3(0,01)| < \frac{1}{4} \times 10^{-8}$. Je mag niet gebruik maken van je rekenapparaat.

ZIE ACHTERKANT

4. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^4}{x^4 - 1}$.

2 a) Bepaal de verticale asymptoten van f . Bepaal voor elke verticale asymptoot $x = a$ de limieten $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ en $\lim_{x \downarrow a} f(x)$.

3 b) Bepaal de horizontale asymptoten van f voor $x \rightarrow \infty$ en $x \rightarrow -\infty$.

3 c) Bepaal de extremen van f met plaats, aard en grootte. Geef aan of de extremen absoluut of relatief zijn.

2 d) Schets met de in a), b), c) gevonden gegevens de grafiek van f .

5 5.a) Bepaal alle primitieven van $x \ln x$.

5 b) Bereken de oneigenlijke integraal $\int_0^{\infty} \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \cdot dx$.

6. Gegeven is de functie $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$.

2 a) Laat zien dat $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + 2(x - y)^2 - 1$ en dat $f(x, y) \geq -1$ voor alle x, y .

4 b) Laat zien dat $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$ de enige stationaire punten zijn van f .

4 c) Ga voor elk van deze punten na of f daarin een maximum of minimum aanneemt of dat het een zadelpunt is. Ga ook na of de eventuele maxima of minima absoluut of relatief zijn.

3 7.a) Gegeven zijn de complexe getallen $z = 1 + \sqrt{3}i$ en $w = 1 + i$. Schrijf z/w in de vorm $a + bi$. Bereken $|z/w|$ en $\text{Arg}(z/w)$.

3 b) Schrijf $(2 - 2i)^{20}$ in de vorm $a + bi$.

4 c) Bepaal de oplossingen van $z^4 = \frac{81}{2}(1 - \sqrt{3}i)$ en teken ze in het complexe vlak.

5 8.a) Bereken $0,090909\dots$

5 b) Ga na of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 2}{n^2 + 1}$ convergeert of divergeert. Je mag gebruiken dat $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ convergeert als $\alpha > 1$ en divergeert als $\alpha \leq 1$.

Formules goniometrie

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y;$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Standaardlimieten voor functies

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x^q} = 0, \quad \text{als } q > 0.$$
