UITWERKING HERKANSING CONTINUE WISKUNDE 1
15 JANUARI 2016

1 a) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi x)-1}{(x-1)^2} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2}\pi\cdot\cos(\frac{1}{2}\pi x)}{2(x-1)} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-(\frac{1}{2}\pi)^2 \sin(\frac{1}{2}\pi x)}{2}$

$= \boxed{-\frac{1}{8}\pi^2}$

b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \boxed{0}$

2 We zoeken twee positieve getallen x,y zodat $x\cdot y^{10}=1$ en $x+y$ is minimaal.
Voor zulke x,y geldt: $x=y^{-10}$. Dus we zoeken ~~x~~ $y>0$ zodat $f(y)=y^{-10}+y$ minimaal is.

Er geldt: $f'(y) = -10y^{-11}+1$ $\quad f'(y)=0 \Leftrightarrow 10y^{-11}=1 \Leftrightarrow y^{11}=10$
$\Leftrightarrow y=10^{1/11}$

Tekenoverzicht

f'		$-$	0	$+$
f	0	$\searrow$	$10^{1/11}$	$\nearrow$

Dus f is minimaal voor $\boxed{y=10^{1/11}}$, $x=\boxed{10^{-10/11}}$

3 a) We gebruiken de tussenwaardestelling: als f continu is op $[a,b]$ en $f(a)<0$, $f(b)>0$ of andersom, dan heeft f een nulpunt op (a,b).
Voor de functie $f(x)=\frac{x^5+x-1}{x^4+1}$, geldt: $f(0)=-1$, $f(1)=\frac{1}{2}$. Dus f heeft een nulpunt op $(0,1)$
Verder geldt: $f(\frac{1}{2})=\frac{(\frac{1}{2})^5+\frac{1}{2}-1}{(\frac{1}{2})^4+1}=\frac{\frac{1}{32}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}+1}<0$. Dus f heeft een nulpunt op $(0,\frac{1}{2})$

b) Merk op: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^5+x-1=0$ want $x^4+1>0$ voor alle x.
$g(x)=x^5+x-1$ is stijgend op $\mathbb{R}$ want $g'(x)=5x^4+1>0$ voor alle x.
Dus $g(x)$, en ook $f(x)$, heeft precies één nulpunt op $\mathbb{R}$.

c) $x^4+1 / x^5+x-1 \backslash x$
$\underline{x^5+x}$
-1

$f(x)=\frac{x^5+x-1}{x^4+1}=x-\frac{1}{x^4+1}$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{1}{x^4+1}=0$

Dus $\boxed{y=x}$ is de scheve asymptoot van $f(x)$ zowel voor $x\to\infty$ als $x\to-\infty$

4 $\lim_{x\uparrow 1} f(x)=4(\cos\frac{1}{6}\pi)^2=4(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2=4\cdot\frac{1}{4}\cdot 3=3$

$\lim_{x\downarrow 1} f(x)={}^2\log 8=3$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)$ bestaat en is gelijk aan 3

Dus $f(x)$ heeft in $x=1$ een ophefbare ~~dis~~ discontinuiteit
We kunnen f continu maken in $x=1$ door te definiëren $f(1)=3$

$\lim_{x\uparrow 2} f(x)={}^2\log 8\cdot 4={}^2\log 32=5$, $\lim_{x\downarrow 2} f(x)=\sqrt[3]{27}=3$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)$ bestaat niet. Dus $f(x)$ heeft in $x=2$ <u>geen</u> ophefbare discontinuiteit

③

⑤ a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	$\sin x + \cos x$	1	1
1	$\cos x - \sin x$	1	1
2	$-\sin x - \cos x$	-1	$-\frac{1}{2}$
3	$-\cos x + \sin x$		

$$P_{2,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 = \boxed{1 + x - \frac{1}{2}x^2}$$

b) $R_{2,0}(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3 = \frac{-\cos\xi + \sin\xi}{3!}x^3$, ξ tussen 0 en x.

c) $|R_{2,0}(0{,}01)| = \left|\frac{-\cos\xi + \sin\xi}{6}10^{-6}\right| \leq \frac{1}{3}\times 10^{-6}$ ξ tussen 0 en 0,01

$|-\cos\xi + \sin\xi| \leq |\cos\xi| + |\sin\xi| \leq 2$ want $-1 \leq \sin\xi, \cos\xi \leq 1$

⑥ $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2}$.

a) Domein: alle x waar de noemer $\neq 0$.
Dus $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$

Verticale asymptoot $x = \sqrt[3]{2}$

$\lim_{x \downarrow \sqrt[3]{2}} f(x) = \infty$ (teller > 0, noemer > 0)

$\lim_{x \uparrow \sqrt[3]{2}} f(x) = -\infty$ (teller > 0, noemer < 0)

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x/x^3}{1 - 2x^{-3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{-2}}{1 - 2x^{-3}} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (zelfde berekening). Dus $y = 0$ is de horizontale asymptoot van $f(x)$ zowel voor $x \to \infty$ als $x \to -\infty$

c) $f'(x) = \dfrac{(x^3-2)\cdot 1 - x\cdot 3x^2}{(x^3-2)^2} = \dfrac{-2x^3-2}{(x^3-2)^2}$

Tekenoverzicht

f'	$+$	0	$-$
		-1	
f	$\nearrow$		$\searrow$

$f(x)$ heeft in $x = -1$ een maximum, $f(-1) = \dfrac{-1}{(-1)^3-2} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

Dit maximum is $\boxed{\text{relatief}}$ want $\lim\limits_{x \downarrow \sqrt[3]{2}} f(x) = \infty$

d)