# UITWERKING TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 1

23/10/2015

1 a) Zij $f(x) = x^3+6x^2+10x+3$. Als $f(x)$ een geheeltallig nulpunt heeft, dan is dat een positieve of negatieve deler van 3, dus $1, -1, 3$ of $-3$

Er geldt: $f(1)>0$, $f(3)>0$, $f(-1) = -1+6-10+3 = -2$,
$f(-3) = -27+54-30+3 = 0$

Dus $-3$ is een nulpunt.

$$
\begin{array}{l}
x+3 \,/\, x^3+6x^2+10x+3 \,\backslash\, x^2+3x+1 \\
\quad\;\; \underline{x^3+3x^2} \; - \\
\qquad\quad 3x^2+10x+3 \\
\qquad\quad \underline{3x^2+9x} \; - \\
\qquad\qquad\quad x+3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x+3} \; - \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$x^3+6x^2+10x+3 = (x+3)(x^2+3x+1)$$

$x^2+3x+1$ heeft nulpunten $\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4}}{2} = \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

Dus $f(x)$ heeft nulpunten $\boxed{-3, \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}}$

b) $f'(x) = 3x^2-3$ dus $f'(x)>0$ voor $x>1$. Dus $f(x)$ is stijgend voor $x>1$

c) We gebruiken de tussenwaardestelling: als $f$ een continue functie is, als $a<b$ en als $f(a)<0$, $f(b)>0$ of andersom, dan is er een $c\in(a,b)$ met $f(c)=0$

Neem $f(x) = x^3-3x+1$. Er geldt: $f(1) = 1-3+1<0$, $f(2) = 8-6+1=3>0$, dus $f(x)$ heeft een nulpunt in $(1,2)$. $f(x)$ kan niet meer dan één nulpunt hebben op $(1,2)$ omdat $f(x)$ stijgend is.

(2)

(2) We zoeken positieve getallen $x, y$ zodat $x+y=1000$ en $x^4y$ maximaal is. Er geldt: $y=1000-x$. Dus we moeten bepalen voor welke $x$ met $0<x<1000$ de functie $f(x)=x^4(1000-x)=1000x^4-x^5$ maximaal is.
Er geldt: $f'(x)=4000x^3-5x^4=5x^3(800-x)$

Tekenoverzicht $f'$ voor $x>0$: $\; 0 \;\; + \nearrow \;\; 800 \;\; - \searrow$

Dus $f(x)$ is maximaal voor $\boxed{x=800}$. Voor die waarde van $x$ is $\boxed{y=200}$

(3) a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x-\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x}-1+x}{1-\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{-1}{(1+x)^2}+1}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2}{(1+x)^3}}{\cos x} = \dfrac{\left(\frac{2}{(1+0)^3}\right)}{\cos 0} = \boxed{2}$

b) $x^{1/x} = \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{(\ln x)/x}$.
Er geldt: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Dus $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x} = e^0 = \boxed{1}$

(4) a) $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ Dus $\lim\limits_{x\downarrow 3} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow 3}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\uparrow 3} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow 3} 2^{-x/3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Dus $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ bestaat en is gelijk aan $\frac{1}{2}$

b) $f(x)$ heeft voor $x=3$ een ophefbare discontinuiteit. Namelijk definieer $f(3)=\frac{1}{2}$. Dan volgt: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$, en

dus hebben we $f(x)$ continu gemaakt in $x=0$

5 a)

| $n$ | $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(64)$ | $f^{(n)}(64)/n!$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $x^{1/6}$ | $2$ | $2$ |
| 1 | $\frac{1}{6}x^{-5/6}$ | $\frac{1}{6\times 32}=\frac{1}{192}$ | $\frac{1}{192}$ |
| 2 | $-\frac{5}{36}x^{-11/6}$ | $-\frac{5}{36\times 2^{11}}$ | $\frac{-5}{72\times 2^{11}}=\frac{-5}{9\times 2^{14}}$ |
| 3 | $\frac{55}{216}x^{-17/6}$ | | |

$64^{1/6}=2$

$64^{5/6}=(64^{1/6})^5=2^5=32$

$64^{11/6}=2^{11}$

$$P_{2,64}(x)=f(64)+\frac{f'(64)}{1!}(x-64)+\frac{f^{(2)}(64)}{2!}(x-64)^2$$

$$=2+\frac{1}{192}(x-64)-\frac{5}{9\times 2^{14}}(x-64)^2$$

$$R_{2,64}(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-64)^3=\frac{55}{1296}\xi^{-17/6}(x-64)^3$$ $\xi$ tussen 64 en $x$

b) $$|R_{2,64}(65)|=\left|\frac{55}{1296}\xi^{-17/6}\cdot 1^3\right|\le\frac{55}{1296}64^{-17/6}$$

$\xi^{-17/6}\le 64^{-17/6}=2^{-17}$

($\xi$ tussen 64 en 65)

$$=\frac{55}{1296}\times 2^{-17}<2^{-21}$$

6 a) De noemer van $f(x)$ is 0 als $x^2+2x-3=0$, d.w.z. als $x=1$ of $x=-3$ (nl $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$).
Dus het domein van $f$ is $\mathbb{R}\setminus\{-3,1\}$

~~b/~~

Verticale asymptoten: voor $x=1$, $x=-3$ is de noemer van $f$ gelijk aan 0, en de teller $\neq 0$. Dus de verticale asymptoten van $f$ zijn $x=1$, $x=-3$

Tekenoverzicht $f$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $+$ | NG | $-$ | NG | $+$ |
| | $-3$ | | $1$ | |

Dus $\lim_{x\downarrow 1} f(x)=\infty$, $\lim_{x\uparrow 1} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\downarrow -3} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\uparrow -3} f(x)=\infty$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = 1$

Dus $y=1$ is een horizontale asymptoot van $f(x)$ voor $x\to\infty$

Dezelfde beredenering geeft $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$
Dus $y=1$ is ook een horizontale asymptoot van $f(x)$ voor $x\to-\infty$

c) $f'(x) = \frac{(x^2+2x-3)\cdot 2x - x^2(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{2x^3+4x^2-6x-2x^3-2x^2}{(x^2+2x-3)^2}$

$= \frac{2x^2-6x}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{2x(x-3)}{(x^2+2x-3)^2}$

Tekenoverzicht $f'$:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | NG | + | 0 | − | NG | − | 0 | + |
| | $-3$ | | 0 | | 1 | | 3 | |
| ↗ | | ↗ | | ↓ | | ↓ | | ↗ |

$x=0$: relatief maximum want $\lim_{x\uparrow -3} f(x)=\infty$ $\quad f(0)=0$

$x=3$: relatief minimum want $\lim_{x\downarrow -3} f(x)=-\infty$ $\quad f(3)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$