

①

UITWERKING TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE I

23/10/2015

① a) Zij $f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 3$. Als $f(x)$ een geheeltallig nulpunt heeft, dan is dat een positieve of negatieve deler van 3, dus 1, 3 of -3

Er geldt: $f(1) > 0$, $f(3) > 0$, $f(-1) = -1 + 6 - 10 + 3 = -2$,

$f(-3) = -27 + 54 - 30 + 3 = 0$

Dus -3 is een nulpunt.

$$x+3 \mid x^3 + 6x^2 + 10x + 3 \mid x^2 + 3x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 \\ \hline 3x^2 + 10x + 3 \\ 3x^2 + 9x \\ \hline x + 3 \\ x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 10x + 3 \\ \hline (x+3)(x^2 + 3x + 1) \end{array}$$

$x^2 + 3x + 1$ heeft nulpunten $\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Dus $f(x)$ heeft nulpunten $\boxed{-3, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}}$

b) $f'(x) = 3x^2 - 3$ dus $f'(x) > 0$ voor $x > 1$. Dus $f(x)$ is stijgend voor $x > 1$

c) We gebruiken de tussenwaardestelling: als f een continue functie is, als $a < b$ en als $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ of andersom, dan is er een $c \in (a, b)$ met $f(c) = 0$

Neem $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Er geldt: $f(1) = 1 - 3 + 1 < 0$, $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3 > 0$, dus $f(x)$ heeft een nulpunt in $(1, 2)$. $f(x)$ kan niet meer dan één nulpunt hebben op $(1, 2)$ omdat $f(x)$ stijgend is.

2

② We zoeken positieve getallen x, y zodat $x+y=1000$ en $x^4 y$ maximaal is. Er geldt: $y=1000-x$. Dus we moeten bepalen voor welke x met $0 < x < 1000$ de functie $f(x) = x^4(1000-x) = 1000x^4 - x^5$ maximaal is. Er geldt: $f'(x) = 4000x^3 - 5x^4 = 5x^3(800-x)$

Tekenschema f' voor $x > 0$

+	-
↗	↘
0	800

Dus $f(x)$ is maximaal voor $x=800$. Voor die waarde van x is $y=200$

③ a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x - \sin x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{1 - \cos x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + 1}{\sin x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{(1+x)^3}}{\cos x} = \frac{\frac{2}{(1+0)^3}}{\cos 0} = \boxed{2}$

b) $x^{1/x} = (e^{\ln x})^{1/x} = e^{(\ln x)/x}$

Er geldt: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Dus $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = e^0 = \boxed{1}$

④ a) $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dus $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \left(\sin \frac{\pi x}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} 2^{-x/\sqrt{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Dus $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x)$ bestaat en is gelijk aan $\frac{1}{2}$

b) $f(x)$ heeft voor $x=3$ een ophelbare discontinuïteit

Namelijk de limiet $f(3) = \frac{1}{2}$. Dan volgt: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$, en

dus hebben we $f(x)$ continu gemaakt in $x=3$

3

5 a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(64)$	$f^{(n)}(64)/n!$
0	$x^{1/6}$	2	2
1	$\frac{1}{6}x^{-5/6}$	$\frac{1}{6 \times 32} = \frac{1}{192}$	$\frac{1}{192}$
2	$-\frac{5}{36}x^{-11/6}$	$-\frac{5}{36 \times 2^{11}}$	$\frac{-5}{72 \times 2^{11}} = \frac{-5}{9 \times 2^{14}}$
3	$\frac{55}{216}x^{-17/6}$		

$64^{1/6} = 2$
 $64^{5/6} = (64^{1/6})^5 = 2^5 = 32$
 $64^{11/6} = 2^{11}$

$$P_{2,64}(x) = f(64) + \frac{f'(64)}{1!}(x-64) + \frac{f''(64)}{2!}(x-64)^2$$

$$= 2 + \frac{1}{192}(x-64) - \frac{5}{9 \times 2^{14}}(x-64)^2$$

$$R_{2,64}(x) = \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(x-64)^3 = \frac{55}{1296}x^{-17/6}(x-64)^3 \quad \int \text{ tussen } 64 \text{ en } x$$

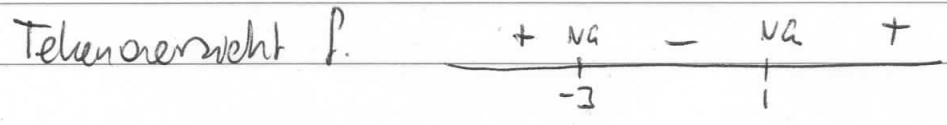
b) $|R_{2,64}(65)| = \left| \frac{55}{1296} \int^{-17/6} \int^3 \right| \leq \frac{55}{1296} 64^{17/6} \int^{-17/6} \int^3$

(\int tussen 64 en 65)

$$= \frac{55}{1296} \times 2^{-17} < 2^{-21}$$

6 a) De noemer van $f(x)$ is 0 als $x^2 + 2x - 3 = 0$, d.w.z. als $x=1$ of $x=-3$ (nl. $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$)
 Dus het domein van f is $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

Verticale asymptoten: voor $x=1, x=-3$ is de noemer van f gelijk aan 0, en de teller $\neq 0$. Dus de verticale asymptoten van f zijn $x=1, x=-3$



(4)

$$\lim_{x \downarrow -3} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \uparrow -3} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \downarrow 3} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \uparrow 3} f(x) = \infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = 1$$

Dus $y=1$ is een horizontale asymptoot van $f(x)$ voor $x \rightarrow \infty$

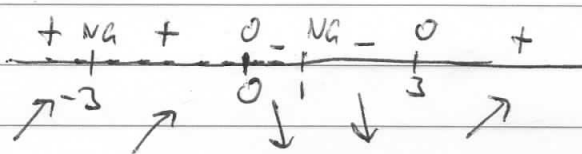
Dezelfde berekening geeft $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

Dus $y=1$ is ook een horizontale asymptoot van $f(x)$ voor $x \rightarrow -\infty$

$$c) f'(x) = \frac{(x^2 + 2x - 3) \cdot 2x - x^2(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{2x^3 + 4x^2 - 6x - 2x^3 - 2x^2}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 6x}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{2x(x-3)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

Tekenschema f'



$x = -3$: relatief maximum want $\lim_{x \uparrow -3} f(x) = \infty$ $f(-3) = 0$

$x = 3$: relatief minimum want $\lim_{x \downarrow 3} f(x) = -\infty$ $f(3) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

