1E HUISWERKOPDRACHT
CONTINUE WISKUNDE 2
Inleverdatum woensdag 13 april, 11:15

Opgave 1.

a) Bepaal de snijpunten van de grafieken van $f(x) = 2x - 5$ en $g(x) = x^2 - 4x$.
b) Schets het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$.
c) Bepaal de oppervlakte van dit gebied.

Opgave 2. Bepaal de primitieven van de volgende functies. Gebruik bij a,b de substitutieregel en bij c,d partiële integratie.

a) $\sqrt[13]{11x + 8}$
b) $e^{x^4+2x^2}(x^3 + x)$
c) $x \cos(4x)$
d) $(x^3 + x) \ln x$

Opgave 3. Bereken de onderstaande bepaalde integralen. Het is het handigste (kleinste kans op fouten) om eerst de primitieven te bepalen, en daarna de grenzen in te vullen.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 7}} dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x} dx$

VOORBEELDEN

1. Bepaal de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = 3 - 2x$ en $g(x) = x^2$.

Oplossing. De snijpunten van de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ worden bepaald door $f(x)$ en $g(x)$ gelijk te stellen. Er geldt:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 3 - 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ of } x = -3. \end{aligned}$$

Uit een plaatje blijkt dat het gebied ingesloten wordt door $f(x)$ en $g(x)$ precies die punten (x, y) bevat met $-3 \leq x \leq 1$ en en dat voor deze waarden van x, $g(x) \leq f(x)$. Dus de oppervlakte van het gebied ingesloten door $f(x)$ en $g(x)$ is

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))dx &= \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)dx = \left[3x - x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{1} \\ &= 3 - 1^2 - \tfrac{1}{3}1^3 - (3 \cdot (-3) - (-3)^2 - \tfrac{1}{3}(-3)^3) = 10\tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. Bepaal de primitieven van $\sin x \cdot \sqrt[5]{\cos x + 2}$.

Oplossing. Probeer dit met de substitutieregel. Een substitutie die vaak werkt is om $u = g(x)$ te nemen wanneer in de integrand (functie onder het integraalteken) iets van de vorm $g(x)^\alpha$, $\sin g(x)$, $\cos g(x)$, $e^{g(x)}$ of iets dergelijks voorkomt.

We proberen hier de substitutie $u = \cos x + 2$. Dan is $du = -\sin x dx$. Dus

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \sqrt[5]{\cos x + 2} dx &= \int \sqrt[5]{u} \cdot (-du) = -\int u^{1/5} du \\ &= -\tfrac{5}{6}u^{6/5} + C = -\tfrac{5}{6}(\cos x + 2)^{6/5} + C. \end{aligned}$$

3. Bepaal de primitieven van $x \ln x$.

Oplossing. We gebruiken partiële integratie. Zoek $f(x)$, $g(x)$ zodat $x \ln x = f(x)g'(x)$. Neem $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. Dan is

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx = (\ln x)\tfrac{1}{2}x^2 - \int \tfrac{1}{2}x^2(\ln x)'dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}dx = \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \int \tfrac{1}{2}x dx = \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C. \end{aligned}$$

4. Bepaal de primitieven van $x^2 \cos x$.

Oplossing. We gebruiken weer partiële integratie. Zoek $f(x)$, $g(x)$ zodat $x^2 \cos x = f(x)g'(x)$. Neem $f(x) = x^2$, $g'(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$. Dan is

$$\int x^2 \cos x dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot (2x)dx$$

Om $\int \sin x \cdot (2x)dx$ uit te werken heeft het geen zin $f(x) = \sin x$ en $g'(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ te nemen want dan komen we weer bij $\int x^2 \cos x dx$ uit en zijn we niets opgeschoten. We schrijven nu de integraal als $\int 2x \sin x dx$ en nemen $f(x) = 2x$, $g'(x) = \sin x$, $g(x) = -\cos x$. Dit geeft

$$\int 2x \sin x dx = -2x \cos x + \int \cos x \cdot 2dx = -2x \cos x + 2 \sin x + C.$$

Dus

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \big(-2x \cos x + 2 \sin x + C \big) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

(het maakt niet uit of we $-C$ of C schrijven omdat C alle reëele getallen doorloopt).

5. Bereken $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$.

Oplossing. We bepalen eerst de primitieven van $x^3 e^{x^2}$. Dit kan door een combinatie van substitutie en partiële integratie. We nemen als substitutie $u = x^2$. Dan $du = 2xdx$, dus $xdx = \frac{1}{2}du$. De integrand kunnen we schrijven als $x^2 e^{x^2} \cdot x$. Dus

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \int x^2 e^{x^2} \cdot xdx = \int ue^u du.$$

We passen op de laatste integraal partiële integratie toe met $f(u) = u$, $g'(u) = e^u$, $g(u) = e^u$. Dit geeft

$$\int ue^u du = ue^u - \int e^u \cdot 1du = ue^u - e^u + C.$$

Bijgevolg is

$$\int x^3 e^{x^2} dx = x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C.$$

Vullen we nu de grenzen in dan krijgen we

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx &= \Big[x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \Big]_0^1 \\ &= \Big(1^2 e^{1^2} - e^{1^2} \Big) - \Big(0^2 e^{0^2} - e^{0^2} \Big) = (e - e) - (0 - e) = e. \end{aligned}$$