3E HUISWERKOPDRACHT
CONTINUE WISKUNDE 2

Inleverdatum 2 mei, 11:15

Opgave 1. Bereken van de volgende functies f de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en laat zien dat $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$:

a) $5x^8y^7 + \cos(xy)$;

b) $e^{x^{3/2}+y}$.

Opgave 2. Gegeven is de functie $f(x, y) = x^5 - 5xy - y^5$.

a) Laat zien dat $(0, 0)$, $(-1, 1)$ de stationaire punten zijn van f.

b) Bepaal voor elk van deze stationaire punten of f daarin een maximum of minimum aanneemt of dat dit stationaire punt een zadelpunt is. Ga in het geval van een maximum of minimum na of dat die absoluut of relatief is.

Opgave 3. Gegeven zijn de functie $f(x, y) = x^4 + y$ en het gebied $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 8 - 4x\}$. De functie f is differentieerbaar, en het gebied D is gesloten en begrensd.

a) Schets D.

b) Bepaal het absolute minimum en het absolute maximum van $f(x, y)$ op D.

VOORBEELDEN

1. Gegeven is de functie $f(x,y) = x^3+3y^2-3xy$. Bepaal de stationaire punten van f en ga voor elk van die punten na of f daarin een maximum of minimum aanneemt of dat dit punt een zadelpunt is. In geval van een maximum of minimum, is dat absoluut of relatief?

Oplossing. De partiële afgeleiden van f zijn

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 3x.$$

We moeten het stelsel $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ oplossen. Uit de tweede vergelijking volgt $x = 2y$. Invullen in de eerste vergelijking geeft $12y^2-3y = 0$, ofwel $3y(4y-1) = 0$. Dit geeft $y = 0$ of $y = \frac{1}{4}$. Samen met $x = 2y$ geeft dit de stationaire punten $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

De tweede orde partiële partiële afgeleiden van f worden gegeven door

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$$

Voor het punt $(0,0)$ vinden we

$$\begin{aligned} &A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -3,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 6, \\ &H = AC - B^2 = -9 < 0. \end{aligned}$$

Dus $(0,0)$ is een zadelpunt van f.

Voor het punt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ vinden we

$$\begin{aligned} &A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}) = 3 > 0,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}) = -3,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}) = 6, \\ &H = AC - B^2 = 9 > 0. \end{aligned}$$

Dus f neemt in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ een minimum aan. Dit minimum is relatief, want

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$$

2. Zelfde vragen als boven voor $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Oplossing. De partiële afgeleiden van f zijn

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Het stelsel vergelijkingen $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ kunnen we omwerken tot het stelsel

$$x^2 = y, \quad y^2 = x.$$

Door deze vergelijkingen te combineren krijgen we $x = y^2 = x^4$, dus $x^4 - x = 0$ ofwel $x(x^3 - 1) = 0$. Dit geeft $x = 0$ of $x = 1$, en dus de stationaire punten $(0, 0)$, $(1, 1)$.

De tweede orde partiële partiële afgeleiden van f worden gegeven door

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Voor het punt $(0, 0)$ vinden we

$$A = 0,\ B = -3,\ C = 0,\ H = AC - B^2 = -9 < 0.$$

Dus $(0, 0)$ is een zadelpunt van f.

Voor het punt $(1, 1)$ vinden we

$$A = 6 > 0,\ B = -3,\ C = 6,\ H = AC - B^2 = 9 > 0.$$

Dus f neemt in $(1, 1)$ een minimum aan. Dit minimum is relatief, want

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y = 0}} f(x, y) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$$

3. Bepaal getallen $x, y, z \geq 0$ met $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en xyz^2 maximaal.

Oplossing. Substitueer $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ in xyz^2. Dit betekent dat we het absolute maximum moeten bepalen van

$$f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2) = xy - x^3y - xy^3$$

op het gebied D met $x \geq 0$, $y \geq 0$, $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ ofwel

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Het gebied D is een kwart cirkelschijf. De rand van D bestaat uit de x-as van $x = 0$ tot $x = 1$, de kwart cirkelboog van $(1, 0)$ naar $(0, 1)$, en de y-as van $y = 0$ tot $y = 1$.

Merk op dat $f(x, y) \geq 0$ voor $(x, y) \in D$, en dat $f(x, y) = 0$ op de rand van D. Dus het absolute maximum van $f(x, y)$ op D wordt zeker niet op de rand aangenomen. Bijgevolg wordt dit absolute maximum aangenomen in een stationair punt in D dat niet op de rand ligt.

De partiële afgeleiden van f zijn

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 3x^2y - y^3 = y(1 - 3x^2 - y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - x^3 - 3xy^2 = x(1 - x^2 - 3y^2)$$

Zoals gezegd zoeken we naar stationaire punten in D die niet op de rand van D liggen. Dit betekent dat we alleen de stationaire punten van f hoeven te bepalen met $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 < 1$. Blijft over

$$3x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + 3y^2 = 1.$$

Elimineer y door $3\times$ de eerste vergelijking te nemen en daar de tweede van af te trekken, dat wil zeggen

$$3(3x^2 + y^2) - (x^2 + 3y^2) = 2, \quad \text{ofwel } 8x^2 = 2,\ x = \tfrac{1}{2}.$$

Dit geeft als stationair punt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

We weten dat f op D een absoluut maximum moet aannemen en dat dat in een stationair punt is. Er is maar één stationair punt van f in D, namelijk $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, en daarin neemt f dus zijn absolute maximum aan. We hoeven dit niet meer na te gaan door A, B, C, H uit te rekenen.

We zien dat xyz^2 maximaal is voor $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

4. Bepaal het absolute minimum en absolute maximum van $f(x,y) = xy$ op het gebied $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 4 - 2x\}$.

Oplossing. Het gebied D is een driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(2,0)$ en $(0,4)$. De rand van D bestaat uit het lijnstuk van $(0,0)$ naar $(2,0)$; het lijnstuk van $(2,0)$ naar $(0,4)$; en het lijnstuk van $(0,4)$ naar $(0,0)$.

De functie $f(x,y)$ heeft partiële afgeleiden $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x$. De stationaire punten van f zijn de punten (x,y) die voldoen aan $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dus $(0,0)$ is het enige stationaire punt van f.

De functie f neemt zijn absolute maximum en minimum op D aan in een stationair punt van f of in een randpunt van D. Maar $(0,0)$ is het enige stationaire punt van f en dat ligt op de rand van D. Dus f neemt zijn absolute maximum en minimum op D aan op de rand van D.

We bekijken f op de rand van D.

Het lijnstuk tussen $(0,0)$ **en** $(2,0)$**.**
Op dit lijnstuk is $y = 0$ dus $f(x,y) = 0$.

Het lijnstuk tussen $(0,0)$ **en** $(0,4)$**.**
Op dit lijnstuk is $x = 0$ dus $f(x,y) = 0$.

Het lijnstuk tussen $(0, 4)$ en $(2, 0)$.
Op dit lijnstuk is $y = 4 - 2x$, dus $f(x, y) = x(4 - 2x) = 4x - 2x^2$. Noem de laatste functie $g(x)$. De afgeleide van $g(x)$ is $g'(x) = 4 - 4x$. We zien dat $g'(x) = 0$ voor $x = 1$, $g'(x) > 0$ voor $0 \leq x \leq 1$ and $g'(x) > 0$ voor $1 \leq x \leq 2$. Dus $g'(x)$ is stijgend voor $0 \leq x \leq 1$, dalend voor $1 \leq x \leq 2$, neemt zijn minimum aan in $x = 0$ en $x = 2$ en neemt zijn maximum aan in $x = 1$. De grootte van het minimum is 0 en de grootte van het maximum is $4 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 = 2$.

Op het lijnstuk tussen $(0, 4)$ en $(2, 0)$ is $y = 4 - 2x$. Dit betekent dat $f(x, y)$ op het lijnstuk tussen $(0, 4)$ en $(2, 0)$ maximaal is voor $x = 1$, $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$.

Conclusie:
- op het lijnstuk tussen $(0, 0)$ en $(2, 0)$ is $f(x, y)$ gelijk aan 0;
- op het lijnstuk tussen $(0, 0)$ en $(0, 4)$ is $f(x, y)$ gelijk aan 0;
- op het lijnstuk tussen $(0, 4)$ en $(2, 0)$ is $f(x, y)$ minimaal en gelijk aan 0 in de punten $(0, 4)$ en $(2, 0)$ en maximaal en gelijk aan 2 in het punt $(1, 2)$.

Dus het absolute minimum van f op D is gelijk aan 0 en dat wordt aangenomen op het lijnstuk tussen $(0, 0)$ en $(2, 0)$ en dat tussen $(0, 0)$ en $(0, 4)$.
Het absolute maximum van f op D is gelijk aan 2 en dat wordt aangenomen in het punt $(1, 2)$.