4E HUISWERKOPDRACHT
CONTINUE WISKUNDE 2
Inleverdatum 11 mei, 11:15

Opgave 1.

a) Teken de volgende complexe getallen z in het complexe vlak en bereken $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$, $|z|$: $z = -i^5 + 10i^{11}$; $z = (2+4i)(3-3i)$.

b) Schrijf $\dfrac{1}{5-i} - \dfrac{1}{3-2i}$ in de vorm $a + bi$ met reële getallen a, b.

Opgave 2. Bereken $\left|\dfrac{(6+8i)^2}{(1+i)^8}\right|$.

Opgave 3. Bepaal de oplossingen van de volgende vergelijkingen en schrijf ze in de vorm $a + bi$: a) $3iz^2 - 12iz + 21i = 0$; b) $z^2 + (3+5i)z + 15i = 0$.

Opgave 4. Schrijf $(1-i)^{10}$ in de vorm $a + bi$.

Opgave 5. Schrijf de oplossingen van $z^6 = -729$ in de vorm $\rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $\rho > 0$ en teken ze in het complexe vlak.

VOORBEELDEN

Opgave 1. Gegeven is $z = \dfrac{5-12i}{3+4i}$. Bepaal $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$, $|z|$.

Oplossing. Voor $z = a + bi$ met a, b reële getallen geldt: $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$, $\overline{z} = a - bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. In ons geval geldt:

$$\begin{aligned} \frac{5-12i}{3+4i} &= \frac{(5-12i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{5\cdot 3 - 5\cdot 4i - 12i\cdot 3 + 12\cdot 4\cdot i^2}{3^2+4^2} \\ &= \frac{15-48+(-20-36)i}{25} = -\frac{33}{25} - \frac{56}{25}\cdot i. \end{aligned}$$

Dus

$$\operatorname{Re} z = -\frac{33}{25},\ \operatorname{Im} z = -\frac{56}{25},\quad \overline{z} = -\frac{33}{25} + \frac{56}{25}\cdot i.$$

Verder is $|z| = \dfrac{|5-12i|}{|3+4i|} = \dfrac{\sqrt{5^2+12^2}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{13}{5}$.

Opgave 2. Bereken $\dfrac{1}{4+i} + \dfrac{1}{6-i}$.

Oplossing. Er geldt

$$\begin{aligned} \frac{1}{4+i} + \frac{1}{6-i} &= \frac{6-i}{(4+i)(6-i)} + \frac{4+i}{(4+i)(6-i)} \\ &= \frac{6-i+4+i}{24-4i+6i-i^2} = \frac{10}{25+2i} \\ &= \frac{10(25-2i)}{25^2+2^2} = \frac{250-20i}{629}. \end{aligned}$$

Opgave 3. Bereken $\left|\dfrac{(4+3i)^{87}}{(3-4i)^{86}}\right|$.

Oplossing. We gebruiken de rekenregels $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$ en $|z/w| = |z|/|w|$ voor complexe getallen z en w.
Er geldt $|4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$ en $|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$. Dus

$$\left|\frac{(4+3i)^{87}}{(3-4i)^{86}}\right| = \frac{|4+3i|^{87}}{|3-4i|^{86}} = \frac{5^{87}}{5^{86}} = 5.$$

Opgave 4. Los op:

a) $(1+i)z^2 + (4+4i)z + 5 + 5i = 0$;
b) $z^2 + (1+2i)z + (-1+i) = 0$.

Oplossing. a) We kunnen $(1+i)z^2+(4+4i)z+5+5i=0$ door $1+i$ delen. We krijgen dan de equivalente vergelijking $z^2+4z+5=0$. De discriminant hiervan is $D=4^2-4\cdot5=-4<0$. De oplossingen van de vergelijking zijn dan $z_1,z_2=\dfrac{-4\pm\sqrt{4}\cdot i}{2}=-2\pm i$.

b) Wanneer we $az^2+bz+c=0$ met a,b,c complexe getallen op willen lossen kunnen we ook als volgt te werk gaan:
1) Deel de vergelijking door a zodat de coëfficiënt van z^2 gelijk wordt aan 1. We krijgen dan de equivalente vergelijking $z^2+b'z+c'=0$, waarbij $b'=b/a$, $c'=c/a$.
2) Zijn u,v twee complexe getallen die voldoen aan

$$u+v=b',\quad u\cdot v=c'$$

Dan zijn $z_1=-u, z_2=-v$ de oplossingen van $z^2+b'z+c'=0$ (en dus ook van $az^2+bz+c=0$).

Bewijs. Door uitschrijven vinden we

$$\begin{aligned}(z+u)(z+v) &= z^2+uz+zv+uv=z^2+(u+v)z+uv\\ &= z^2+b'z+c'.\end{aligned}$$

Dus $z^2+b'z+c'=0 \Leftrightarrow (z+u)(z+v)=0 \Leftrightarrow z=-u$ of $z=-v$.

In het geval van $z^2+(1+2i)z+(-1+i)=0$ is de coëfficiënt van z^2 al gelijk aan 1. De oplossingen zijn $-u$, $-v$ met

$$u+v=1+2i,\quad uv=-1+i.$$

Merk op dat $u=1+i$, $v=i$ voldoen, namelijk $(1+i)+i)=1+2i$ en $(1+i)i=i+i^2=-1+i$. Dus de oplossingen zijn $z_1=-1-i$, $z_2=-i$.

Opgave 5. Schrijf $(2\sqrt{3}-2i)^{57}$ in de vorm $a+bi$.

Oplossing. We schrijven eerst $2\sqrt{3}-2i$ in de vorm $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ met $r>0$. In het algemeen geldt: $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ met

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

In ons geval geeft dat

$$r=\sqrt{2^2+2^2(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4\cdot2^2}=4,\quad \cos\varphi=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad \sin\varphi=-\tfrac{1}{2}.$$

De hoek $\varphi=-\pi/6$ voldoet hieraan. Dus $2\sqrt{3}-2i=4(\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6))$.

De formule van de Moivre geeft

$$\begin{aligned}(2\sqrt{3}-2i)^{57} &= 4^{57}(\cos(-57\pi/6)+i\sin(-57\pi/6)) \\ &= 4^{57}\big(\cos(-9\tfrac{1}{2}\pi)+i\sin(-9\tfrac{1}{2}\pi)\big) = 4^{57}(\cos\tfrac{1}{2}\pi+i\sin\tfrac{1}{2}\pi) \\ &= 4^{57}i.\end{aligned}$$

Opgave 6. Bepaal de oplossingen van $z^8 = 256i$ en schrijf ze in de vorm $\rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $\rho > 0$.

Oplossing. We schrijven eerst $256i$ in de vorm $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r > 0$. Er geldt $256i = 256(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi)$, dus $r = 256$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

De oplossingen van $z^8 = 256i$ zijn nu (omdat $\sqrt[8]{256} = 2$)

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[8]{r}\Big(\cos\big(\tfrac{1}{8}\varphi + \tfrac{2k}{8}\pi\big) + i\sin\big(\tfrac{1}{8}\varphi + \tfrac{2k}{8}\pi\big)\Big) \\ &= 2\Big(\cos\big(\tfrac{1}{16}\pi + \tfrac{k}{4}\pi\big) + i\sin\big(\tfrac{1}{16}\pi + \tfrac{k}{4}\pi\big)\Big) \quad (k = 0,1,2,3,4,5,6,7).\end{aligned}$$

Deze oplossingen zijn de hoekpunten van een regelmatige achthoek die liggen op een cirkel met middelpunt 0 en straal 2.