5E HUISWERKOPDRACHT
CONTINUE WISKUNDE 2

Inleverdatum 18 mei, 11:15

Opgave 1. Bepaal de oplossingen van $z^8 + 5z^4 + 4 = 0$ en schrijf ze in de vorm $\rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $\rho > 0$. Teken de oplossingen in het complexe vlak.

Opgave 2. Schrijf $e^{2-\frac{1}{4}\pi i}$ in de vorm $a + bi$ met a, b reëele getallen.

Opgave 3. Bepaal de oplossingen van $e^z = 5\sqrt{3} + 5i$ en schrijf ze in de vorm $a + bi$ met a, b reëele getallen.

Opgave 4. Bereken de volgende reeksen:

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-10)^n}{13^n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{7^n} + \frac{2}{12^n}\right)$.

Opgave 5. Bereken $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3}{(n-4)(n-3)}$.

VOORBEELDEN

1. Bepaal de oplossingen van $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ en schrijf ze in de vorm $\rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ met $\rho > 0$.

Oplossing. Stel eerst $z^2 = w$. Dan voldoet w aan $w^2+4w+16 = 0$. Dit is een kwadratische vergelijking van discriminant $D = 4^2 - 4\cdot 16 = -48$. Dus de oplossingen van de vergelijking zijn

$$w_1 = \frac{-4+\sqrt{48}\cdot i}{2} = \frac{-4+4\sqrt{3}i}{2} = -2+2\sqrt{3}i, \quad w_2 = -2-2\sqrt{3}i.$$

We moeten nu de oplossingen bepalen van $z^2 = w_1$ en van $z^2 = w_2$.

Algemeen geldt: als $q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ met $r > 0$ dan worden de oplossingen van $z^n = q$ gegeven door

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})\Big) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

We passen dit eerst toe op $z^2 = w_1$. Schrijf eerst w_1 in de vorm $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Er geldt

$$r = |w_1| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4,$$
$$\cos\varphi = -\tfrac{1}{2}, \ \sin\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

dus $w_1 = 4(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$.
De oplossingen van $z^2 = w_1$ worden dus gegeven door

$$z_k = 2\big(\cos(\tfrac{1}{3}\pi + k\pi) + i\sin(\tfrac{1}{3}\pi + k\pi)\big) \quad (k = 0, 1).$$

Dit werd niet gevraagd, maar we kunnen deze oplossingen nog omwerken tot

$$z_0 = 1+\sqrt{3}i, \quad z_1 = -1-\sqrt{3}i.$$

We lossen $z^2 = w_2$ op dezelfde manier op. Net als boven vinden we

$$w_2 = 4(\cos\tfrac{4}{3}\pi + i\sin\tfrac{4}{3}\pi).$$

Dus de oplossingen van $z^2 = w_2$ worden gegeven door

$$z'_k = 2\big(\cos(\tfrac{2}{3}\pi + k\pi) + i\sin(\tfrac{2}{3}\pi + k\pi)\big) \quad (k = 0, 1).$$

We kunnen deze oplossingen omwerken tot

$$z'_0 = -1+\sqrt{3}i, \quad z'_1 = 1-\sqrt{3}i.$$

Dus $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ heeft vier oplossingen, namelijk z_0, z_1, z'_0, z'_1.

2. Schrijf $e^{5\pi i/12}$ in de vorm $a + bi$ met a, b reële getallen.

Oplossing. Er geldt $\dfrac{5}{12} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4}$, dus $e^{5\pi i/12} = e^{\pi i/6} \cdot e^{\pi i/4}$. We werken de e-machten uit met behulp van $e^{bi} = \cos b + i \sin b$. Dit geeft

$$\begin{aligned} e^{\pi i/6} &= \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i, \\ e^{\pi i/4} &= \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}i, \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} e^{5\pi i/12} &= \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}i\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}i + \tfrac{1}{2}i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}i \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{6}i + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}i + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}i^2 \\ &= \left(\tfrac{1}{4}\sqrt{6} - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right) + \left(\tfrac{1}{4}\sqrt{6} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right)i. \end{aligned}$$

3. Schrijf $e^{17+\pi i/6}$ in de vorm $a + bi$ met a, b reële getallen.

Oplossing. Algemeen geldt: $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$. Dus

$$e^{17+\pi i/6} = e^{17}(\cos \tfrac{1}{6}\pi + i \sin \tfrac{1}{6}\pi) = e^{17}(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i).$$

4. Bepaal alle oplossingen van $e^z = 3 - 3i$ en schrijf ze in de vorm $a + bi$.

Oplossing. Algemeen geldt: als $q = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ met $r > 0$ dan worden de oplossingen van $e^z = q$ gegeven door

$$z_k = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i \quad (k \in \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\})$$

dat wil zeggen voor elk geheel getal k (positief, negatief of 0) krijgen we een oplossing z_k en die zijn allemaal verschillend.

In ons geval geldt $3 - 3i = 3\sqrt{2}(\cos(-\frac{1}{4}\pi) + i\sin(-\frac{1}{4}\pi))$. Dus de oplossingen van $e^z = 3 - 3i$ worden gegeven door

$$z_k = \ln(3\sqrt{2}) + i(-\tfrac{1}{4}\pi + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

5. Bereken $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$.

Oplossing. We gebruiken $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} r^n = \frac{r^p}{1-r}$ voor $-1 < r < 1$.

Dit geeft

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} = \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n = \frac{(-1/4)^5}{1 - (-1/4)} = -\frac{1}{4^5 \times 5/4} = -\frac{1}{1280}.$$

6. Bereken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(3\Big(-\frac{2}{5}\Big)^n+\frac{8^{n+1}}{9^n}\right)$.

Oplossing. De hele reeks kunnen we schrijven als een som van twee reeksen:

$$3\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{2}{5}\Big)^n+8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8^n}{9^n}=3\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{2}{5}\Big)^n+8\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{8}{9}\Big)^n.$$

Er geldt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{2}{5}\Big)^n=\frac{1}{1-(-2/5)}=\frac{1}{7/5}=\frac{5}{7}$$

en

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{8}{9}\Big)^n=\frac{1}{1-(8/9)}=9.$$

Dit leidt uiteindelijk tot

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(3\Big(-\frac{2}{5}\Big)^n+\frac{8^{n+1}}{9^n}\right)=3\times\frac{5}{7}+8\times 9=\frac{15}{7}+72=74\frac{1}{7}.$$

7. Bereken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$.

Oplossing. We moeten de partiële sommen

$$s_K=\sum_{n=1}^{K}\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(K-1)(K+2)}+\frac{1}{K(K+3)}$$

uitrekenen. Dan is $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}=\lim_{K\to\infty}s_K$.

Er geldt $\dfrac{1}{1\cdot 4}=\dfrac{1}{3}\Big(1-\dfrac{1}{4}\Big)$, $\dfrac{1}{2\cdot 5}=\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\Big)$ en in het algemeen $\dfrac{1}{n(n+3)}=\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+3}\Big)$ (ga zelf na). Dus

$$\begin{aligned}s_K=&\frac{1}{3}\Big(1-\frac{1}{4}\Big)+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\Big)+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\Big)+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\Big)+\cdots+\\&+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{K-3}-\frac{1}{K}\Big)+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{K-2}-\frac{1}{K-1}\Big)+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{K-1}-\frac{1}{K+2}\Big)+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{K}-\frac{1}{K+3}\Big).\end{aligned}$$

In de som valt $-\frac{1}{4}$ weg tegen een term $+\frac{1}{4}$ die later komt, $-\frac{1}{5}$ valt weg tegen $+\frac{1}{5}$ enzovoort, en tenslotte valt $-\frac{1}{K}$ weg tegen $+\frac{1}{K}$. De enige termen die overblijven zijn 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{K+1}$, $-\frac{1}{K+2}$, $-\frac{1}{K+3}$. Al deze termen moeten met $\frac{1}{3}$ worden vermenigvuldigd. Dus

$$s_K=\frac{1}{3}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{K+1}-\frac{1}{K+2}-\frac{1}{K+3}\Big)$$

en

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \lim_{K\to\infty} s_K = \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{3}\Big(\frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6}\Big) = \frac{11}{18}.$$