6E HUISWERKOPDRACHT CONTINUE WISKUNDE 2

Inleverdatum 25 mei, 11:15

Opgave 1. Bereken $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6^n} + \frac{6^n}{11^n} \right)$.

Opgave 2. Ga voor de volgende reeksen na of ze convergent of divergent zijn:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^6}$ (gebruik het integraalkenmerk);

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n-1}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^5}$ (vergelijk met $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$);

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$;

Opgave 3. Bepaal de waarden van x waarvoor $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 4^n x^n$ convergeert.

MEETKUNDIGE REEKSEN

Er geldt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots \begin{cases} = \dfrac{1}{1-r} & \text{als } -1 < r < 1 \quad \text{(convergent)}, \\ = \infty & \text{als } r \geq 1 \quad \text{(divergent)}, \\ \ \text{bestaat niet} & \text{als } r \leq -1 \quad \text{(divergent)}. \end{cases}$$

Hieruit volgt dat

$$\sum_{n=p}^{\infty} r^n = \frac{r^p}{1-r} \quad \text{als } -1 < r < 1.$$

Namelijk

$$\sum_{n=p}^{\infty} r^n = r^p + r^{p+1} + r^{p+2} + \cdots = r^p(1 + r + r^2 + \cdots) = \frac{r^p}{1-r}.$$

Verder geldt voor convergente reeksen $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ dat

$$\sum_{n=p0}^{\infty} (Aa_n + Bb_n) = A\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big) + B\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$$

Voorbeeld. Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \left(5 \cdot \frac{3^n}{5^n} + 7 \cdot \frac{(-2)^n}{11^n}\right)$.

Oplossing. Volgens bovenstaande rekenregels geldt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(5 \cdot \frac{3^n}{5^n} + 7 \cdot \frac{(-2)^n}{11^n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(5 \cdot \Big(\frac{3}{5}\Big)^n + 7 \cdot \Big(-\frac{2}{11}\Big)^n\right) \\ &= 5\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{3}{5}\Big)^n + 7\sum_{n=1}^{\infty} \Big(-\frac{2}{11}\Big)^n \\ &= 5 \cdot \frac{3/5}{1-3/5} + 7 \cdot \frac{-2/11}{1-(-2/11)} \\ &= 5 \cdot \frac{3}{2} + 7 \cdot \frac{-2}{13} = \frac{15}{2} - \frac{14}{13} = \frac{167}{26}. \end{aligned}$$

CONVERGENTIEKENMERKEN

Hoe bepalen we of $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent of divergent is?

We merken eerst het volgende op. Het maakt voor de convergentie of divergentie van een reeks niet uit of we een eindig aantal termen weglaten of toevoegen. Anders gezegd: voor elk tweetal willekeurige getallen p en q met $q > p$ geldt

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ convergent } \Leftrightarrow \sum_{n=q}^{\infty} a_n \text{ convergent.}$$

De reeks links van de pijl is $a_p + a_{p+1} + \cdots$, d.w.z. begint bij p, en de reeks rechts van de pijl begint pas bij a_q, d.w.z. we hebben de termen $a_p, \ldots, a_{q-1}$ weggehaald.

1) Divergentiekenmerk. Kijk altijd eerst naar $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Als $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ of niet bestaat dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent.

Als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dan is er geen uitsluitsel. Dan kan $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ zowel convergeren als divergeren.

Voorbeelden: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{7n}$ is divergent, want $\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{7n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+5/n}{7} = \frac{1}{7} \neq 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent (zie onder) maar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$=0.

2) Integraalkenmerk. Zij $f(x)$ een continue, monotoon dalende functie op $[p, \infty)$ met $f(x) \geq 0$ voor $x \geq p$. Dan geldt:

$\int_p^{\infty} f(x)dx$ convergent $\Longrightarrow \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ convergent,

$\int_p^{\infty} f(x)dx$ divergent $\Longrightarrow \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ divergent.

Dit kenmerk kan worden gebruikt voor reeksen van het type $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ of $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$.

Voorbeeld. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ is convergent als $s > 1$ en divergent als $s \leq 1$.

Namelijk als $s \neq 1$ dan is

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^{-s}dx &= \lim_{B\to\infty}\int_1^B x^{-s}dx = \lim_{B\to\infty}\left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^B \\ &= \lim_{B\to\infty}(\frac{1}{1-s}\Big(B^{1-s}-1\Big) = \begin{cases}\infty & \text{als } s<1,\\ -\dfrac{1}{1-s}=\dfrac{1}{s-1} & \text{als } s>1.\end{cases}\end{aligned}$$

Verder is

$$\int_1^\infty x^{-1}dx = \lim_{B\to\infty}\int_1^B x^{-1}dx = \lim_{B\to\infty}\big[\ln x\big]_1^B = \infty.$$

Dus $\displaystyle\int_1^\infty x^{-s}dx$ is convergent als $s>1$ en divergent als $s\leq 1$.

Voorbeeld. Is $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^3}$ convergent of divergent?

We kijken naar $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\cdot dx$. We bepalen eerst de primitieven van $\dfrac{1}{x(\ln x)^3}$. We doen dit met behulp van de substitutie $u=\ln x$. Dan geldt

$$\begin{aligned}du &= \frac{1}{x}\cdot dx,\\ \int\frac{1}{x(\ln x)^3}\cdot dx &= \int\frac{1}{u^3}\cdot du = -\tfrac{1}{2}u^{-2}+C = -\tfrac{1}{2}(\ln x)^{-2}+C.\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}\int_2^\infty\frac{1}{x(\ln x)^3}\cdot dx &= \lim_{B\to\infty}\int_2^B\frac{1}{x(\ln x)^3}\cdot dx = \lim_{B\to\infty}\big[-\tfrac{1}{2}(\ln x)^{-2}\big]_2^B\\ &= \lim_{B\to\infty} -\tfrac{1}{2}\big((\ln B)^{-2}-(\ln 2)^{-2}\big) = \tfrac{1}{2}(\ln 2)^{-2}<\infty.\end{aligned}$$

De integraal $\displaystyle\int_2^\infty\frac{1}{x(\ln x)^3}\cdot dx$ is convergent. Dus $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n(\ln n)^3}$ is convergent.

3) Vergelijkingskenmerk. Zijn $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ en $\sum\limits_{n=q}^{\infty} b_n$ reeksen met $a_n \geq 0$ en $b_n \geq 0$ voor alle n. Dan geldt:

(i) Stel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$ met $\ell < \infty$. Dan geldt:

$$\sum_{n=q}^{\infty} b_n \text{ convergent } \Longrightarrow \sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ convergent.}$$

(ii) Stel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$ met $\ell > 0$. Dan geldt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ divergent } \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergent.}$$

Dit kenmerk wordt meestal toegepast met $b_n = n^{-s}$. Zoek bij gegeven a_n een macht n^{-s} zodat a_s van de zelfde orde van grootte is als n^{-s}, bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^{-s}}$ en pas het criterium toe.

Voorbeeld. Is $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+2\sqrt{n}}$ convergent of divergent?

Merk op: $\dfrac{1}{1+2\sqrt{n}}$ is van orde van grootte $n^{-1/2}$.Pas het vergelijkingskenmerk toe met $a_n = \dfrac{1}{1+2\sqrt{n}}$ en $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Er geldt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-1/2}+2} = \tfrac{1}{2}.$$

De reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ is divergent. Dus $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+2\sqrt{n}}$ is divergent.

Voorbeeld. Is $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{3n^2-2}$ convergent of divergent?

Merk op: de teller is van orde van grootte n en de noemer van orde van grootte n^2, dus $\dfrac{n+1}{3n^2-2}$ is van orde van grootte n/n^2=n^{-1}. Pas het vergelijkingskenmerk toe met $a_n = \dfrac{n+1}{3n^2-2}$ en $b_k = n^{-1}$. Er geldt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n^2-2} \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{3nk^2-2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^{-1}}{3-2n^{-2}} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Er geldt: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ is divergent. Dus $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2-2}$ is ook divergent.

Voorbeeld. Is $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n^2)$ convergent of divergent?

Er geldt $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dus voor x heel dicht bij 0 geldt $\sin x \approx x$. In het bijzonder $\sin(1/n^2) \approx 1/n^2$ voor k heel groot. Pas het vergelijkingskenmerk to met $a_n = \sin(1/n^2)$ en $b_n = 1/n^2$. Er geldt (via de substitutie $x = 1/n^2$),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2} = \lim_{x\to} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

De reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ is convergent. Dus $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n^2)$ is convergent.

Voorbeeld. Is $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{10}}{n^{4/3}}$ convergent of divergent?

We passen het vergelijkingskenmerk toe met $a_n = \dfrac{(\ln n)^{10}}{n^{4/3}}$ en $b_n = n^{-s}$, waarbij we s moeten bepalen. Er geldt

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(\ln n)^{10}/n^{4/3}}{n^{-s}} = \frac{(\ln n)^{10}}{n^{(4/3)-s}}.$$

Er geldt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b} = 0$ voor alle $a > 0$, $b > 0$ (standaardlimiet uit CW1).
Dus $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ als $\frac{4}{3} - s > 0$, met andere woorden, als $s < \frac{4}{3}$.

Verder geldt dat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeert als $s > 1$.
We combineren nu de condities $s < \frac{4}{3}$ en $s > 1$, dat wil zeggen, $1 < s < \frac{4}{3}$.
Als $a_n = \dfrac{(\ln n)^{10}}{n^{4/3}}$ en $b_n = n^{-s}$ met $1 < s < \frac{4}{3}$, dan is $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent en $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.
Dus wegens het vergelijkingskenmerk is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

4) Quotiëntkenmerk. (i) Als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ convergent.

(ii) Als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent.

(iii) Als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ of als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ niet bestaat dan geeft dit kenmerk geen uitsluitsel.

Dit kenmerk moet worden gebruikt wanneer er in a_n faculteiten ($n!$, $(2n)!$ e.d.) of exponentiële termen (2^n, 3^n e.d.), voorkomen.

Voorbeeld. Is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ convergent of divergent?

Pas het quotiëntkenmerk toe met $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$. Er geldt

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{n!} == \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n!} \\
&= \frac{1 \cdot 2 \cdots n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdots 2n(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots 2n}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)}.
\end{aligned}$$

Dus

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}+n^{-2}}{(2+n^{-1})(2+n^{-2})} = 0.$$

Wegens het quotiëntkenmerk is $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ convergent.

Voorbeeld. Voor welke waarden van x convergeert $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$?
Pas het quotiëntkenmerk toe met $a_n = nx^n$. Er geldt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \frac{n+1}{n} \cdot x.$$

Dus

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot |x| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)|x| = |x|.$$

Volgens het quotiëntkenmerk is $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ convergent als $|x| < 1$ en divergent als $|x| > 1$.

We bekijken het geval $|x| = 1$, dat wil zeggen $x = 1$ of $x = -1$, apart.
We gebruiken het divergentiecriterium: als $\lim_{n\to\infty} a_n$ niet gelijk is aan 0 of als de limiet niet bestaat dan is $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ divergent.

Voor $x = 1$ krijgen we de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} n$. Deze is divergent, want $\lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$.

Voor $x = -1$ krijgen we de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$. Deze is divergent, want $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n$ bestaat niet.