TENTAMEN CONTINUE WISKUNDE 2 4/4/2018

(1) a) De inhoud van het omwentelingslichaam is

$$\pi\int_0^{7/2} f(x)^2\,dx = \pi\int_0^{7/2}(1+\cos\pi x)\,dx = \pi\left[x+\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^{7/2}$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{\pi}\sin\frac{7}{2}\pi\right)-\left(0+\frac{1}{\pi}\sin 0\right)\right\}=\pi\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{\pi}\right)=\boxed{\frac{7}{2}\pi-1}$$

b) $$\int x\sqrt[3]{1+2x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int u^{1/3}\cdot\frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}u^{4/3}+C$$

$u=2x^2$
$du=4x\,dx$
$x\,dx=\frac{1}{4}du$

$$=\boxed{\frac{3}{16}(1+2x^2)^{4/3}+C}$$

c) $$\int xe^{-3x}\,dx \underset{\uparrow}{=} x\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)-\int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\cdot 1\,dx$$

$f(x)=x$
$g'(x)=e^{-3x}$
$g(x)=-\frac{1}{3}e^{-3x}$

$$=-\frac{1}{3}xe^{-3x}+\int\frac{1}{3}e^{-3x}\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+C$$

Dus $$\int_0^{\infty}xe^{-3x}\,dx=\lim_{B\to\infty}\int_0^B xe^{-3x}\,dx=\lim_{B\to\infty}\left[-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}\right]_0^B$$

$$=\lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\underbrace{Be^{-3B}}_{\downarrow 0}-\frac{1}{9}\underbrace{e^{-3B}}_{\downarrow 0}\right)-\left(-\frac{1}{3}\cdot 0\,e^{-3\cdot 0}-\frac{1}{9}\cdot e^{-3\cdot 0}\right)=\boxed{\frac{1}{9}}$$

(2) a) $f(x,y)=(x+1)^3-xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3(x+1)^2-y^2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2xy$$

Stationaire punten: $3(x+1)^2=y^2$, $2xy=0$

Geval 1: $x=0$. Dan $3=y^2$, dus $y=\pm\sqrt{3}$. Dit geeft de stationaire punten $(0,\sqrt{3}),(0,-\sqrt{3})$

Geval 2: $y=0$. Dan $3(x+1)^2=0$, dus $x=-1$. Dit geeft het stationaire punt $(-1,0)$.

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6(x+1)=A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-2y=B$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x=C$,

$H=AC-B^2$

	A	B	C	H	
$(-1,0)$	0	0	2	0	geen uitsluitsel
$(0,\sqrt{3})$	6	$-2\sqrt{3}$	0	$-(2\sqrt{3})^2=-12<0$	zadelpunt
$(0,-\sqrt{3})$	6	$2\sqrt{3}$	0	$-12<0$	zadelpunt

c) $(-1,0)$ apart bekijken. Voor $y=0$ geldt $f(x,y)=(x+1)^3$
Dus $f(-1,0)=0$, $f(x,0)>0$ voor $x>-1$, $f(x,0)<0$ voor $x<-1$,
dus f neemt in $(-1,0)$ geen maximum of minimum aan.

d) Vergelijking van het raakvlak in $(1,1,f(1,1))$ aan de grafiek van f:

$z=f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) \Rightarrow$

$\boxed{z=7+11(x-1)-2(y-1)}$

(3) a) $(1+i)^2=(1+i)(1+i)=1+i+i+i^2=2i$,

$\frac{(1+i)^2}{2+i}=\frac{2i}{2+i}=\frac{2i(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4i-2i^2}{2^2+1^2}=\frac{2+4i}{5}=\boxed{\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i}$

b) Schrijf eerst $8-8i$ in de vorm $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ met $r>0$

$r=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$, $\cos\varphi=\frac{8}{8\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin\varphi=\frac{-8}{8\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

3b) (vervolg) Dus $8-8i = 8\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{1}{4}\pi) + i\sin(-\frac{1}{4}\pi)\right)$.
Dit geeft

$$(8-8i)^{11} = (8\sqrt{2})^{11}\left(\cos(-\tfrac{11}{4}\pi) + i\sin(-\tfrac{11}{4}\pi)\right)$$

$$= 2^{\frac{7}{2}\times 11}\left(\cos(-\tfrac{3}{4}\pi) + i\sin(-\tfrac{3}{4}\pi)\right) = 2^{\frac{99}{2}}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i\right)$$

$$= \boxed{2^{49}(-1-i)} \qquad \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 2^{-\frac{1}{2}}\right)$$

3c) $128i = 2^7(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi)$
Dus de oplossingen van $z^7 = 128i$ zijn

$$\boxed{z_k = 2\cdot\left(\cos\left(\tfrac{1}{14}\pi + \tfrac{2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{14}\pi + \tfrac{2k\pi}{7}\right)\right). \quad (k=0,1,2,3,4,5,6)}$$

3d) $8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$
Dus de oplossingen van $e^z = 8i$ zijn $\boxed{z_k = \ln 8 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z})}$

(4) a) Gebruik het limietcriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{2^k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+2^{-k}} = 1 \neq 0. \text{ Dus } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^k+1} \boxed{\text{divergeert}}$$

b) Gebruik het quotiëntcriterium.
Als $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ dan is $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergent,
als $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ dan is $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Neem $a_k = \frac{k^{80}}{k!}$. Dan is $a_{k+1} = \frac{(k+1)^{80}}{(k+1)!}$. Dus

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{80}}{(k+1)!} \Big/ \frac{k^{80}}{k!} = \frac{(k+1)^{80}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{k^{80}} = \frac{(k+1)^{80}\,\cancel{1\cdot 2 \cdots k}}{\cancel{1\cdot 2 \cdots k}\,(k+1)\cdot k^{80}} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{80}\cdot\frac{1}{k+1}$$

dus $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{80} \cdot \frac{1}{k+1} = 0.$

Dus $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{80}}{k!}$ **convergeert**

c) Gebruik het vergelijkingscriterium: als $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ voor alle k en $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l$ met $0 < l < \infty$, dan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergent $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergent

Pas dit toe met $a_k = \frac{5+k^{1/3}}{1+k^{3/2}}$.

Voor k groot geldt: $a_k \approx \frac{k^{1/3}}{k^{3/2}} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{k^{\frac{9}{6}-\frac{2}{6}}} = k^{-7/6}.$

Pas het vergelijkingscriterium toe met a_k als boven en $b_k = k^{-7/6}$.

Er geldt: $\frac{a_k}{b_k} = \frac{5+k^{1/3}}{1+k^{3/2}} \Big/ k^{-7/6} = \frac{5+k^{1/3}}{1+k^{3/2}} k^{7/6} = \frac{5k^{7/6}+k^{3/2}}{1+k^{3/2}}$

$= \frac{5k^{-1/3}+1}{k^{-3/2}+1}$

Dus $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1.$

~~Volgens~~ De reeks $\sum_{k=1} k^{-7/6}$ convergeert.

Dus $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5+k^{1/3}}{1+k^{3/2}}$ **convergeert**