Introduction to Algebraic Topology, najaar 2017, huiswerkset 2

De inleverdatum voor deze huiswerkset is maandag 30 oktober. Lever uw opgaven bij voorkeur op papier in in het postvakje van Stefan van der Lugt. Lukt dit niet, dan gelieve uw opgaven per email te sturen aan `algtop2017@gmail.com`. Samenwerken is toegestaan, maar overschrijven uiteraard niet. U mag gebruik maken (maar dan wel met verwijzingen) van de stof uit colleges 1–6, van het materiaal uit Fulton: Secties 11a, b, c, d, 12a, b, 13a, b, c, d en al het materiaal uit de syllabus Topologie (inclusief de opgaven). Indien u gebruik wenst te maken van een resultaat uit de sets oefenopgaven (zie de weken 1, 2 en 5) dan dient u voor dat resultaat een (kort) argument te geven.

Opgave 1. Geef een surjectieve continue afbeelding $f\colon S^1 \to S^1$ van graad nul.

Opgave 2. Zij C de ruimte die verkregen wordt uit $[0,1] \times S^1$ door de deelruimte $\{0\} \times S^1$ samen te trekken tot een punt. Dat wil zeggen C is de quotiëntruimte $([0,1] \times S^1)/\sim$ voor de equivalentierelatie $\sim$ op $[0,1] \times S^1$ gegeven door $y \sim y' \Leftrightarrow y = y'$ of $y, y' \in \{0\} \times S^1$.

(i) Geef een homeomorfisme $C \xrightarrow{\sim} D^2$, waarbij D^2 de eenheidsschijf is in $\mathbb{R}^2$.

Zij X een topologische ruimte en zij $f\colon S^1 \to X$ een continue afbeelding.

(ii) Bewijs: f is homotoop met een constante afbeelding dan en slechts dan als f uitbreidt naar een continue afbeelding $\tilde{f}\colon D^2 \to X$.

(iii) Zij $f\colon S^1 \to S^1$ een continue afbeelding die niet surjectief is. Bewijs dat f een dekpunt heeft.

Opgave 3. Zij $p(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \cdots + c_{k-1} z + c_k$ met $k > 0$ een monisch polynoom van positieve graad met coëfficiënten in $\mathbb{C}$. Het doel van deze opgave is om de Hoofdstelling van de Algebra te bewijzen. Neem aan dat p geen nulpunt heeft in $\mathbb{C}$. Laat $f\colon S^1 \to S^1$ de beperking zijn tot $S^1 \subset \mathbb{C}$ van de continue afbeelding $\mathbb{C} \to S^1$ gegeven door $z \mapsto p(z)/|p(z)|$.

(i) Bewijs dat f homotoop is met een constante afbeelding.

(ii) Bewijs dat f homotoop is met de afbeelding $z \mapsto z^k$. Hint: gebruik de identiteit

$$t^k p(\frac{z}{t}) = z^k + t(c_1 z^{k-1} + t c_2 z^{k-2} + \cdots + t^{k-1} c_k)$$

voor $t \in (0,1]$.

(iii) Leid een tegenspraak af uit de aanname dat p geen nulpunt heeft in $\mathbb{C}$.

Als π een groep is en S een rechts-π-verzameling, dan definiëren we de verzameling

$$\mathrm{Aut}_\pi(S) = \{f\colon S \to S \,\text{bijectie} : \forall \alpha \in \pi\, \forall s \in S\colon f(s \cdot \alpha) = f(s) \cdot \alpha\}\,.$$

Opgave 4. Laat zien dat de verzameling $\mathrm{Aut}_\pi(S)$ een groep vormt met als groepsbewerking samenstelling van afbeeldingen.

Opgave 5. Zij X een samenhangende en lokaal wegsamenhangende ruimte. Laat $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding zijn met Y samenhangend. Kies een basispunt $x \in X$ en laat Y_x de vezel zijn van x langs p. We weten dat Y_x op natuurlijke wijze een rechts-π-verzameling is, waarbij $\pi = \pi_1(X, x)$.

(i) Laat zien dat de toekenning $\varphi \mapsto \varphi|_{Y_x}$ een groepshomomorfisme

$$\psi\colon \operatorname{Aut}(Y/X) \to \operatorname{Aut}_\pi(Y_x)$$

levert.

(ii) Bewijs dat ψ een groepsisomorfisme is.

Opgave 6. Zij π een groep en S een transitieve rechts-π-verzameling. Na keus van een basispunt in S kunnen we S op natuurlijke wijze identificeren met een verzameling van nevenklassen $\pi/H = \{H\alpha\colon \alpha \in \pi\}$, voorzien van de natuurlijke rechts-π-werking. Hierbij is H een ondergroep van π.

(i) Welke ondergroep is dit?

(ii) Zij $N_\pi(H) \subset \pi$ de normalisator van H in π (zie het dictaat Algebra 1, versie 2017, p. 65). Geef een groepsisomorfisme

$$\phi\colon N_\pi(H)/H \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut}_\pi(S)\,.$$

Een volledig antwoord op deze vraag bevat de volgende onderdelen: een bewijs dat de door u voorgestelde ϕ een goed gedefinieerde afbeelding is; een bewijs dat uw ϕ een groepshomomorfisme is; en een bewijs dat uw ϕ injectief en surjectief is.

Zij nu X een samenhangende en lokaal wegsamenhangende ruimte. Kies een basispunt $x \in X$ en laat $p\colon (Y, y) \to (X, x)$ een gepunte overdekkingsafbeelding zijn met Y samenhangend. Via p_* is $\pi_1(Y, y)$ een ondergroep van $\pi_1(X, x)$.

(iii) Geef een natuurlijk isomorfisme van groepen

$$\operatorname{Aut}(Y/X) \xrightarrow{\sim} N_{\pi_1(X,x)}(\pi_1(Y, y))/\pi_1(Y, y)\,.$$