**Introduction to Algebraic Topology, najaar 2017, oefenopgaven - week 11**

**Opgave 1.** Laat $v_0, \ldots, v_p$ vectoren zijn in $\mathbb{R}^n$. We zeggen dat $v_0, \ldots, v_p$ *affien onafhankelijk* zijn als de vectoren $v_1 - v_0, \ldots, v_p - v_0$ lineair onafhankelijk zijn. Neem aan dat $v_0, \ldots, v_p$ affien onafhankelijk zijn. Laat zien dat de continue afbeelding $A(v_0, \ldots, v_p)\colon \Delta_p \to \mathbb{R}^n$ als gedefinieerd in Lee, p. 341 een homeomorfisme op haar beeld is. Hint: bewijs eerst dat de afbeelding injectief is. Een bijectieve continue afbeelding van een compacte ruimte naar een Hausdorffruimte is een homeomorfisme.

**Opgave 2.** (i) Laat zien dat $A(e_1, e_0) + A(e_0, e_1)$ een rand is in $C_1(\Delta_1)$.

(ii) Zij $\sigma\colon \Delta_1 \to X$ een singuliere 1-keten gegeven door $[0,1] \ni t \mapsto \sigma(t)$ en zij $\overline{\sigma}\colon \Delta_1 \to X$ gegeven door $[0,1] \ni t \mapsto \sigma(1-t)$. Laat zien dat $\sigma + \overline{\sigma}$ een rand is in $C_1(X)$.

**Opgave 3.** Laat $X$ een topologische ruimte zijn. Zij $A \subset X$ een deelruimte en $r\colon X \to A$ een retractie. Laat $p \in \mathbb{Z}$. Laat zien dat er een natuurlijk isomorfisme $\mathrm{H}_p(A) \oplus \mathrm{Ker}(r_{p,*}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_p(X)$ bestaat. Hint: kijk nog eens naar wat er in de syllabus Algebra I, versie 2017, in §9 staat over het splitsen van korte exacte rijtjes.

**Opgave 4.** Laat $C_\bullet$ en $D_\bullet$ twee ketencomplexen zijn. We zeggen dat twee ketenhomomorfismen $\phi_1, \phi_2\colon C_\bullet \to D_\bullet$ homotoop zijn als er een homotopie van $\phi_1$ naar $\phi_2$ bestaat. Laat zien dat homotopie een equivalentierelatie definieert op de verzameling $\mathrm{Hom}(C_\bullet, D_\bullet)$ van ketenhomomorfismen van $C_\bullet$ naar $D_\bullet$.

**Opgave 5.** Laat $C_\bullet, D_\bullet$ en $E_\bullet$ drie ketencomplexen zijn. Laat $\phi_1, \phi_2\colon C_\bullet \to D_\bullet$ twee ketenhomomorfismen zijn, en $\psi_1, \psi_2\colon D_\bullet \to E_\bullet$ ook. Veronderstel dat $\phi_1, \phi_2$ homotoop zijn, en $\psi_1, \psi_2$ ook. Laat zien dat $\psi_1 \circ \phi_1$ en $\psi_2 \circ \phi_2$ homotoop zijn.

**Opgave 6.** Laat $X, Y$ twee topologische ruimten zijn. Laat $f, g\colon X \to Y$ twee homotope afbeeldingen zijn. Laat zien dat de ketenhomomorfismen $f_\#, g_\#\colon C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ homotoop zijn.

**Opgave 7.** Laat $X$ een topologische ruimte zijn en $t\colon C_\bullet(X) \to C_\bullet(X)$ een ketenafbeelding. Veronderstel dat $t_0$ gelijk is aan de identiteit op $C_0(X)$. Bewijs dat $t$ homotoop is met de identiteit. Hint: kijk nog eens naar de constructie van een homotopie van $s$ naar de identeit in Lee, Proof of Proposition 13.19 op pp. 363–364, waarbij $s\colon C_\bullet(X) \to C_\bullet(X)$ de barycentrische onderverdelingsafbeelding is. Die constructie gebruikt van $s$ alleen dat $s_0$ de identiteit is.

**Opgave 8.** Maak een plaatje van de eerste barycentrische onderverdeling van het standaard 3-simplex $\Delta_3$, en tel het aantal 3-simplices hierin.

**Opgave 9.** Bekijk nog eens Fulton, Chapter 14d waarin onder andere de fundamentaalgroep van een samenhangende eindige graaf wordt berekend. Zij $X$ een samenhangende eindige graaf. Laat zien dat $\mathrm{H}_1(X)$ isomorf is met $\mathbb{Z}^n$, voor zekere $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Deze $n$ wordt het *(eerste) Betti-getal* van $X$ genoemd.