

Het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer

Een *elliptische kromme* (over het lichaam \mathbf{Q} van de rationale getallen) is een vlakke algebraïsche kromme gedefinieerd door een vergelijking van de vorm

$$E: y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b \in \mathbf{Q}, \quad 4a^3 + 27b^2 \neq 0).$$

Aan een elliptische kromme E kennen we de groep $E(\mathbf{Q})$ van *rationale punten* toe; dit zijn alle punten (x, y) met rationale coördinaten die aan bovenstaande vergelijking voldoen samen met een “punt op oneindig”. Via een klassieke constructie kan men $E(\mathbf{Q})$ voorzien van een abelse groepsstructuur. Een fundamenteel resultaat over elliptische krommen is de *stelling van Mordell*, die zegt dat de abelse groep $E(\mathbf{Q})$ eindig voortgebracht is.

Gegeven een elliptische kromme E kan men een holomorfe functie $L(E, s)$ van een complexe variable s definiëren. Deze functie staat bekend als de *L-functie* van E en is enigszins vergelijkbaar met de ζ -functie van Riemann. Het beroemde vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer zegt dat de rang van de eindig voortgebrachte abelse groep $E(\mathbf{Q})$ gelijk is aan de orde van de L -functie in $s = 1$.

De basis voor dit bachelorproject is het bestuderen van de benodigde theorie rond het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer. Hierbij komt onder andere de rol van de *modulariteitsstelling* voor elliptische krommen aan de orde. Voor de precieze verdere invulling van het project zijn er verschillende mogelijkheden, zoals het onderzoeken wat er voor deelresultaten bekend zijn of het formuleren van de sterke variant van het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer.

Voorkennis: Het wordt sterk aanbevolen om in het voorjaar het vak Elliptic Curves te volgen. Ook Algebra 2 en 3 alsmede Analytic Number Theory kunnen bij dit project van pas komen.

Begeleider: Peter Bruin (P.J.Bruin@math.leidenuniv.nl)