bachelorproject

Roosters

Ronald van Luijk

Een *rooster* (lattice) is een eindig voortgebrachte vrije abelse groep L met een symmetrische bilineaire paring

$$b\colon L \times L \to \mathbb{Z}$$

die niet-gedegenereerd is in de zin dat er voor elke $x \in L - \{0\}$ een $y \in L$ is met $b(x, y) \neq 0$. Met andere woorden, de geïnduceerde afbeelding

$$L \to \operatorname{Hom}(L, \mathbb{Z}) \tag{1}$$

die x stuurt naar $y \mapsto b(x, y)$ is injectief. We schrijven vaak $x \cdot y$ in plaats van $b(x, y)$.

Voorbeeld: elke ondergroep van $\mathbb{R}^n$ voortgebracht door de elementen van een basis van vectoren in $\mathbb{Z}^n$, met als paring het gebruikelijke Euclidische inproduct, is een rooster.

Roosters spelen in verbazingwekkend veel takken van de wiskunde een belangrijke rol. In dit project bekijken we de roosters op zichzelf. We zullen enkele invarianten van roosters definiëren en uitzoeken of die invarianten de roosters vast leggen.

Een eerste invariant is de *rang*, namelijk het gehele getal r waarvoor L als groep isomorf is met $\mathbb{Z}^r$.

Een tweede invariant is de *discriminant*: gegeven een basis $(x_1, \ldots, x_r)$ voor L, is de discriminant van L gelijk aan de determinant van de matrix $(x_i \cdot x_j)_{i,j}$. De discriminant hangt niet af van de keuze van de basis. Als de discriminant gelijk is aan ± 1, dan noemen we het rooster *unimodulair*. In dat geval is de afbeelding (1) een isomorfisme.

We noemen een rooster L *even* als $x \cdot x$ even is voor alle $x \in L$. Een rooster dat niet even is heet *oneven*.

We noemen een rooster *positief definiet* als voor elke $x \in L$ geldt $x \cdot x \geq 0$. We noemen een rooster *negatief definiet* als voor elke $x \in L$ geldt $x \cdot x \leq 0$. Een rooster dat noch positief noch negatief definiet is, heet *indefiniet*.

Een belangrijk resultaat uit de theorie van roosters is dat we de unimodulaire indefiniete roosters kunnen classificeren. Voor de oneven roosters hebben we de volgende stelling.

Stelling 1. *Zij L een unimodulair indefiniet oneven rooster. Dan is er een basis $(x_1, \ldots, x_r)$ voor L met $x_i \cdot x_j = 0$ voor $i \neq j$ en $x_i \cdot x_i = \pm 1$.*

Deze stelling zegt dat elk unimodulair indefiniet oneven rooster isomorf is met de orthogonale directe som van 1-dimensionale unimodulaire roosters. Voor de unimodulaire indefiniete **even** roosters geldt een soortgelijke stelling, met de 1-dimensionale roosters vervangen door twee specifieke roosters, één van rang 2 en één van rang 8.

Het project kan eruit bestaan deze stellingen te bewijzen. Daarnaast kunnen we ook kijken wat er van de stellingen over blijft als we kijken naar definiete roosters of indefiniete roosters die niet unimodulair zijn. Een speciale rol wordt gespeeld door de zogenaamde *wortelroosters* (root lattices).

Literatuur: bijvoorbeeld J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, hoofdstuk V.