

Bas Edixhoven: Uitwendige automorfismen van S_6 .

Als G een groep is, dan hebben we ook meteen de groep $\text{Aut}(G)$ van automorfismen van G . Automorfismen van de vorm $c_g: G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$, met een vaste g in G , heten *inwendig*.

Het natuurlijke getal 6 heeft de volgende eigenschap: het is het enige natuurlijke getal n waarvoor de permutatiegroep S_n automorfismen heeft die niet inwendig zijn. Dit is een bekend resultaat en er is al een bachelorscriptie over dit onderwerp geschreven door Afke Schouten in 2009:

<https://www.universiteitleiden.nl/binaries/content/assets/science/mi/scripties/bachschouten.pdf>

De verklaring voor het bestaan van deze *uitwendige* automorfismen is dat S_6 “toevallig” 2 verschillende conjugatieklassen van ondergroepen van index 6 heeft: enerzijds de stabilisatoren van elementen van $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, en anderzijds de beelden in S_6 komend van de werking van de groep $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ op de projectieve lijn $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ en een bijectie $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$. Voor H een ondergroep van S_6 van de tweede soort geeft de actie van S_6 op S_6/H door linksvermenigvuldiging, samen met een bijectie $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow S_6/H$ een uitwendig automorfisme.

Het doel van deze scriptie is het geven van een andere (betere?) verklaring, namelijk dat S_6 isomorf is met de groep $\text{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$ van inverteerbare 4 bij 4 matrices g met coëfficiënten in $\mathbb{F}_2$ met de eigenschap $g^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dit is de groep van automorfismen van de $\mathbb{F}_2$ -vectorruimte $\mathbb{F}_2^4$ die de *symplectische bilineaire vorm* $\mathbb{F}_2^4 \times \mathbb{F}_2^4 \rightarrow \mathbb{F}_2, (x, y) \mapsto x^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot y$ vast laten. Van zulke matrixgroepen is veel bekend, en wel zoveel dat het geen “toeval” is dat $\text{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$ uitwendige automorfismen heeft. Dit is ook een bekend resultaat, maar een expliciete beschrijving van zo’n automorfisme ken ik niet. Daar moet deze scriptie wat aan doen.

Referentie:

<https://pdfs.semanticscholar.org/c4b8/389fde1252f59fdb4374630ef098296404f9pdf>

en dan precieser: pagina’s 80–81.