

Pro-eindige Fibonacci-getallen II

In 2015 heb ik een project over *Pro-eindige Fibonacci-getallen* begeleid, waarvan de beschrijving als volgt luidde:

“Op

www.math.leidenuniv.nl/~hw1/PUBLICATIONS/2005b/art.pdf

vindt men een artikel getiteld *Profinite Fibonacci numbers*, dat op een informele manier eigenschappen van de ring $\hat{\mathbf{Z}}$ behandelt. Deze ring, die bekend staat als de *pro-eindige complettering* van de ring $\mathbf{Z}$ der gehele getallen, speelt op diverse plaatsen in de algebraïsche getaltheorie en arithmetische meetkunde een belangrijke rol. Tweedejaars studenten hebben hem misschien ontmoet in de *oneindige Galoistheorie*.

Het net genoemde artikel illustreert een aantal saillante eigenschappen van de ring $\hat{\mathbf{Z}}$ aan de hand van onderwerpen en begrippen die wat dichterbij de belevingswereld van de meeste wiskundigen staan dan de enigszins abstracte vakgebieden waar de ring zijn voornaamste toepassingen vindt. Hoewel het artikel in hoofdzaak een pedagogisch doel dient, zijn de aan de orde komende onderwerpen geenszins triviaal of oppervlakkig.

Het project bestaat eruit om een rigoureuze opzet te geven van de hele theorie zoals die in het artikel aangestipt wordt. Veel wordt slechts terloops gemeld, formele definities en bewijzen zijn praktisch afwezig, en er zijn talrijke losse eindjes. Het artikel bestaat uit slechts drie pagina's tekst en één illustratie, maar de student die het project ter hand neemt, zal merken dat er heel wat bij komt kijken om overal de puntjes op de i te zetten.

De voorkennis voor het project bestaat uit de colleges Algebra 1, 2 en 3. Bekendheid met het taalgebruik der topologie zal ook van pas komen. Kennis van p -adische getallen geeft de student een voorsprong maar kan ook gemakkelijk tijdens het project verworven worden.”

Tot zover de projectbeschrijving van vier jaar geleden. Jelle Bulthuis nam de uitvoering van het project ter hand. In zijn bachelorscriptie, die men op internet kan vinden, geeft hij een inleiding tot de ring $\hat{\mathbf{Z}}$ en zijn eigenschappen, maar er blijft nog veel te doen over. Uit Jelle's resultaten volgt dat er een unieke continue functie $F: \hat{\mathbf{Z}} \rightarrow \hat{\mathbf{Z}}$ bestaat met de eigenschap dat voor elke $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ de waarde die F in $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \subset \hat{\mathbf{Z}}$ aanneemt gelijk is aan het n -de Fibonacci-getal; met andere woorden, er geldt $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, en $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ voor elke $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. Jelle is er niet aan toe gekomen om alle in mijn artikel genoemde eigenschappen van deze functie F te bewijzen. Ik beweer bijvoorbeeld dat de verzameling $\{x \in \hat{\mathbf{Z}} : F(x) = x\}$ van dekpunten van F naast 0, 1 en 5 nog precies acht verdere elementen uit $\hat{\mathbf{Z}}$ bevat. Het vervolgproject zou eruit kunnen bestaan de theorie waarmee men dit bewijst, te bestuderen. Een alternatief is om bewijzen te leveren van de beweringen die ik in een later artikel *Profinite number theory* over de ring $\hat{\mathbf{Z}}$ doe; zie hiervoor de *Newsletter of the European Mathematical Society* **100** (June 2016) (pp. 14–18), eenvoudig op internet te vinden.

Begeleider: Hendrik Lenstra