Opgaven bij het college Complexe Analyse

Opgave 1. Druk $\cos 3\varphi$ en $\sin 3\varphi$ uit in $\cos\varphi$ en $\sin\varphi$.

Opgave 2. Schets de volgende verzamelingen in het complexe vlak:
(i) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1+i| \leq |z-2|\}$;
(ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\frac{z-1}{z+1}| = 2\}$.

Opgave 3. Zij $\alpha \in \mathbb{C}$. Geef een meetkundige beschrijving van de afbeelding $z \mapsto \alpha \cdot z$ op $\mathbb{C}$.

Opgave 4. Los op in $z \in \mathbb{C}$:
(i) $z^6 - 2z^5 + z - 2 = 0$;
(ii) $z^2 + iz + 3 = 0$.

Opgave 5. Toon aan dat alle oplossingen van de vergelijking $e^{1/z} = e$ op eenzelfde cirkel liggen.

Opgave 6. Bewijs:
(i) $\varnothing$ en $\mathbb{C}$ zijn open;
(ii) de doorsnede van twee open verzamelingen is open;
(iii) een vereniging van open verzamelingen is open.

Opgave 7. Bewijs dat de Möbiustransformatie $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ het bovenhalfvlak $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ op het binnengebied $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ van de eenheidscirkel afbeeldt.

Opgave 8. Bereken $\int_W (z+1)\overline{z}dz$, waarbij W de eenheidscirkel is, eenmaal linksom doorlopen.

Opgave 9. Zij $p(z)$ een polynoom, en laat C_δ de cirkel zijn met straal δ om 0, eenmaal linksom doorlopen. Bewijs dat

$$\int_{C_\delta} \overline{p(z)}dz = 2\pi i \delta^2 \overline{p'(0)}\,.$$

Opgave 10. Geef een machtreeksontwikkeling voor $\frac{1}{(z-1)^3}$ voor $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < 1$.

Opgave 11. Ga na voor welke $z \in \mathbb{C}$ de functiereeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$$

convergent is.

Opgave 12. Bereken de convergentiestraal van

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n + 2)^n z^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^{-n}} z^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n\,.$$

Opgave 13. Bepaal de eerste vijf termen van de inverse van de machtreeks $1 - z - 2z^2$.

Opgave 14. Bewijs:
$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{n^2} dx = 2\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(2m+1)^3}\,.$$

Opgave 15. De functies $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn gedefinieerd door $f_n(x) = \frac{x}{n}$ voor $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. De nulfuntie geven we aan met f. Bewijs dat $f_n \to f$ als $n \to \infty$. Bewijs dat $f_n \to f$ uniform op $[-1000, 1000]$ maar dat op $\mathbb{R}$ de convergentie niet uniform is.

Opgave 16. Zij $f(z) = e^z$. Bewijs dat $f'(z) = e^z$.

Opgave 17. Toon aan dat de functie $z \mapsto |z|$ nergens analytisch is.

Opgave 18. Toon aan dat de functie $\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\mathrm{Arg} z$ analytisch is op het rechterhalfvlak $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$.

Opgave 19. De functie f is analytisch op $\mathbb{C}$. Schrijf $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$ en $f(z) = f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ met $u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$. Er is gegeven dat $u(x, y) = -3x^2y+y^3$. Bepaal $v(x, y)$.

Opgave 20. Bewijs dat de functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven door $f(z) = \exp(-1/z^2)$ voor $z \neq 0$ en door 0 voor $z = 0$, niet continu is in $z = 0$.

Opgave 21. Voor $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < 1$ definiëren we de machtreeks
$$\arctan z = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}\,.$$
Bewijs dat $\frac{d}{dz} \arctan z = \frac{1}{1+z^2}$ voor $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < 1$.

Opgave 22. Bepaal $f^{(n)}(0)$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$ voor de functie $f(z) = z/(1-z)$ door $f(z)$ als een machtreeks te schrijven.

Opgave 23. Bewijs dat een machtreeks $f(z) = \sum a_n z^n$ met convergentiestraal $R > 0$ een primitieve heeft op $U_R(0)$, d.w.z. een analytische functie $F : U_R(0) \to \mathbb{C}$ zodat $F' = f$ op $U_R(0)$.

Opgave 24. Zij U een gebied in $\mathbb{C}$ en $f : U \to \mathbb{C}$ een analytische functie. Neem aan dat $|f|$ constant is. Bewijs dat f constant is.

Opgave 25. Bereken $\int_\gamma \frac{z^2}{z-1} dz$ waarbij γ de cirkel is met straal 2 en middelpunt 0, eenmaal linksom doorlopen.

Opgave 26. Bereken $\int_\gamma \frac{1-3z}{(z+1)^2} dz$ waarbij γ de cirkel is met straal 3 en middelpunt 0, eenmaal linksom doorlopen.

Opgave 27. Bereken $\int_0^{4\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$.