Huiswerkset 1 LA1NA- Inleverdatum: 30 september, voor 9:00 AM.

Opgave 1. Voor welke a staan de vectoren

$$(1, -2, a, 3) \quad \text{en} \quad (5, 1, 1, a)$$

in $\mathbb{R}^4$ loodrecht op elkaar?

Opgave 2. De n-dimensionale hyperkubus is de verzameling vectoren $(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ met $0 \leq x_i \leq 1$ voor alle $i = 1, \ldots, n$. Bepaal, voor alle n, de cosinus van de hoek tussen de zijde die van $(0, \ldots, 0)$ naar $(1, 0, \ldots, 0)$ loopt en de lichaamsdiagonaal, die van $(0, \ldots, 0)$ naar $(1, \ldots, 1)$ loopt. Wat is de limiet van deze hoek als n naar oneindig nadert?

Opgave 3. Los de volgende stelsels lineaire vergelijkingen op:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & = & 3 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & 5x_3 & = & -4 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}\right. .$$

Opgave 4. Ga na of de vector $(3, 3, 4)$ in de span ligt van de vectoren $(1, -1, 2)$ en $(3, 0, 5)$.

Opgave 5. Vind a, b en c zodat de parabool $y^2 = ax^2 + bx + c$ door de punten $(-1, 4)$, $(1, 0)$ en $(-2, -3)$ gaat.

Opgave 6. Gegeven zijn de kolomvector $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ en de rijvector $v = (2, -1, 3)$.

(i) Bereken de 3×3-matrix $A = u \cdot v$.

(ii) Voor elke kolomvector w in $\mathbb{R}^3$ ligt $A \cdot w$ in de span van u. Bewijs dit.

Opgave 7. Een vierkante matrix A heet *symmetrisch* als $A^T = A$, en *scheef-symmetrisch* als $A = -A^T$.

(i) Gegeven een vierkante matrix A, laat zien dat $A + A^T$ symmetrisch is, en $A - A^T$ scheef-symmetrisch.

(ii) Bewijs dat elke vierkante matrix A op een unieke wijze kan worden geschreven als $A = B + C$ waarbij B een symmetrische matrix is, en C een scheef-symmetrische matrix.