Tentamen Lineaire algebra 1 NA
23 december 2010, 14:00–17:00

Het tentamen is *geen* open-boek-tentamen. Alleen de hulp van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. Definieer de matrix A door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & -4 & 5 & 3 \\ -1 & -4 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Wat is de rang van A?

(b) Geef een basis van de kern van A.

(c) Geef een basis van het beeld van A.

Opgave 2. Een kwadratische kromme bedoelen we een kromme van de vorm

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

voor zekere getallen a, b, c, d, e, f.

(a) Vind een kwadratische kromme waar de vijf punten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(3,2)$ op liggen.

(b) Ligt elk vijftal punten in het vlak op een kwadratische kromme? Motiveer je antwoord!

Opgaven 3,4,5 op volgende pagina

Opgave 3. Voor elk getal $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geef de determinant van A_x.

(b) Voor welke getallen x is A_x inverteerbaar?

(c) Bereken de inverse van A_1.

Opgave 4. Laat $L \subset \mathbb{R}^3$ de lijn zijn door de punten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bepaal de afstand van het punt $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tot L.

Opgave 5. Laat $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ en definieer G_n voor $n \geq 2$ door $G_n = 5G_{n-1} - 6G_{n-2}$. We hebben dus $G_2 = 5$ en $G_3 = 19$. Het doel van deze opgave is om een formule voor G_n te vinden. Definieer de matrix A door

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat voor alle $n \geq 0$ geldt: $\begin{pmatrix} G_{n+1} \\ G_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Wat zijn de eigenwaarden en eigenruimten van A?

(c) Geef een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D zodat $A = CDC^{-1}$.

(d) Geef een formule voor G_n.

— SUCCES!! —