**<u>Korte</u> uitwerkingen toets LA1NA, donderdag 27 oktober 2011**

**Opgave 1. (2 punten)** Bepaal de hoek tussen de vectoren $(7,-5,1,5)$ en $(0,1,0,0)$ in $\mathbb{R}^4$.

*Korte uitwerking* Voor de hoek $\theta$ tussen twee niet-nul vectoren $v, w$ in $\mathbb{R}^n$ geldt

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}.$$

In ons geval nemen we $v = (7,-5,1,5)$ en $w = (0,1,0,0)$ en vinden $v \cdot w = -5$, $\|v\| = 10$, $\|w\| = 1$, dus $\cos\theta = -1/2$ en $\theta = 2\pi/3$.

**Opgave 2. (2 punten)** Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de inverse van $A$.
(b) Geef een $3 \times 3$-matrix $C$ zodat $AC = B$.

*Korte uitwerking* (a) De inverse $A^{-1}$ van $A$ kan gevonden worden door het stappenplan op p. 80 van het boek te doorlopen. We vinden dan

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Voor de matrix $C = A^{-1}B$ geldt $AC = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = B$. Expliciet is

$$C = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -10 \\ 6 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Opgave 3. (3 punten)** Geef een basis voor de nulruimte (kern) en voor de kolomruimte van de matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Korte uitwerking* We vegen de matrix naar gereduceerde rijtrapvorm:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(tussenstappen zijn weggelaten). Deze laatste matrix heeft zijn pivots in kolommen 1 en 2. Dit impliceert dat kolommen 1 en 2 van de oorspronkelijke matrix een basis vormen voor zijn kolomruimte. Een basis voor de kolomruimte is dus $\{(-1,1,1),(3,1,2)\}$. Uit de gereduceerde rijtrapvorm is verder af te leiden dat de algemene vector in de nulruimte eruit ziet als

$$(-2r+s,-r-2s,r,s)=r(-2,-1,1,0)+s(1,-2,0,1)\,.$$

Een basis voor de nulruimte is dus $\{(-2,-1,1,0),(1,-2,0,1)\}$.
N.B. Er zijn andere antwoorden mogelijk - een basis is niet uniek.

**Opgave 4. (3 punten)** Laat $L$ de lijn in $\mathbb{R}^3$ zijn door de punten $(-1,0,1)$ en $(1,3,1)$. Laat $V$ het vlak zijn in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking $3x-y+2z=-2$.
(a) Bepaal het snijpunt $p$ van $L$ en $V$.
(b) Geef vectoren $w_1,w_2$ zodat $V=p+\mathrm{span}(w_1,w_2)$.

*Korte uitwerking* (a) Voor $L$ kiezen we steunvector $(-1,0,1)$ en richtingsvector $(1,3,1)-(-1,0,1)=(2,3,0)$. Een parametervoorstelling voor $L$ is dus

$$L\colon \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$$

Een punt $p=(-1,0,1)+r(2,3,0)=(-1+2r,3r,1)$ op $L$ ligt ook op $V\colon 3x-y+2z=-2$ als $3(-1+2r)-3r+2=-2$. Dit oplossen geeft $r=-1/3$. Invullen geeft voor het gevraagde snijpunt $p=(-5/3,-1,1)$.
(b) Zij $W$ de oplossingsruimte van $3x-y+2z=0$, d.w.z. de nulruimte van de matrix $(3,-1,2)$. Er geldt dan $V=p+W$. Voor $\{w_1,w_2\}$ kunnen we dus een basis nemen van $W$. Bijvoorbeeld $w_1=(1/3,1,0)$, $w_2=(-2/3,0,1)$.