Introduction to Algebraic Topology, najaar 2017, oefenopgaven week 13

Opgave 1. Geef een voorbeeld van een topologische ruimte X, een punt $x \in X$ en een lus $\sigma\colon [0,1] \to X$ met begin- en eindpunt x zodat: (1) de klasse van σ in $\pi_1(X,x)$ is niet-triviaal, (2) de klasse van σ in $\mathrm{H}_1(X)$ is triviaal.

Opgave 2. Laat $G = \mathbb{R}^2$ en $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ met $\det(Q) \neq 0$. Zij $\tilde{q}\colon G \to G$ het groepshomomorfisme gegeven door vermenigvuldiging met de matrix Q. Zij $L = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2 = G$ en schrijf $T = G/L$.

(i) Laat zien dat $\tilde{q}\colon G \to G$ een surjectief groepshomomorfisme $q\colon T \to T$ induceert.

(ii) Construeer met behulp van het slangenlemma een isomorfisme $\mathrm{Ker}(q) \xrightarrow{\sim} L/\tilde{q}L$.

(iii) Laat zien dat $L/\tilde{q}L$ een eindige abelse groep is met $|\det(Q)|$ elementen.

(iv) Maak nog eens Opgave 2(iv) uit Huiswerkset 1.

Opgave 3. Laat $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Als in Opgave 1 van de set oefenopgaven van week 8 laat Σ^{n+1} de quotiëntruimte $([0,1] \times S^n)/\approx$ voor de equivalentierelatie $\approx$ op $[0,1] \times S^n$ gegeven door $y \approx y' \Leftrightarrow y = y'$ of $y, y' \in \{0\} \times S^n$ of $y, y' \in \{1\} \times S^n$. Zij $f\colon S^n \to S^n$ een continue afbeelding.

(i) Laat zien dat de continue afbeelding $\mathrm{id} \times f\colon [0,1] \times S^n \to [0,1] \times S^n$ een continue afbeelding $\Sigma f\colon \Sigma^{n+1} \to \Sigma^{n+1}$ induceert.

(ii) Via het isomorfisme $\Sigma^{n+1} \xrightarrow{\sim} S^{n+1}$ uit Opgave 1 van de set oefenopgaven van week 8 kunnen we Σf opvatten als een continue afbeelding $S^{n+1} \to S^{n+1}$. Laat zien dat f en Σf dezelfde graad hebben. Hint: de opens $[0,1) \times S^n$ en $(0,1] \times S^n$ leveren een open overdekking $\Sigma^{n+1} = U \cup V$. Kijk naar het verbindende homomorfisme

$$\partial_*\colon H_{n+1}(\Sigma^{n+1}) \to H_n(U \cap V) \cong H_n(S^n)$$

in de bijbehorende Mayer-Vietoris lange exacte rij, dat in dit geval een isomorfisme is, zie het bewijs van Theorem 13.23 in Lee. De natuurlijkheid van de Mayer-Vietoris lange exacte rij geeft nu dat $\partial_* \circ (\Sigma f)_* = f_* \circ \partial_*$.

(iii) Laat zien dat voor iedere $m \in \mathbb{Z}$ er een continue afbeelding $f\colon S^n \to S^n$ bestaat van graad m. Hint: bewijs de uitspraak voor $n = 1$, en voer dan inductie naar n.

(iv) Geef een surjectieve continue afbeelding $f\colon S^n \to S^n$ van graad nul. Hint: Opgave 1 van huiswerkset 2, en inductie naar n.

Opgave 4. In de set oefenopgaven van week 2 is tussen Opgaven 3 en 4 de belofte gedaan dat de volgende uitspraak nog bewezen zou worden: zij $m \in \mathbb{Z}_{>2}$ en $Y = S^{2k}$ een even-dimensionale sfeer. Dan bestaat er geen vrije werking van $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ op Y. In deze opgave wordt deze belofte ingelost. Zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ en laat $G \subset \mathrm{Aut}(S^n)$ een ondergroep zijn. We zeggen dat G vrij werkt op S^n als voor alle $g \in G$ en alle $x \in S^n$ geldt: $g \cdot x = x \Rightarrow g = \mathrm{id}$. Veronderstel nu dat $n = 2k$ even is, en dat G vrij werkt op S^n. Zijn $g, h \in G$ twee elementen, beide ongelijk aan id_{S^n}.

(i) Laat zien dat g en h beide graad -1 hebben.

(ii) Laat zien dat $gh = \mathrm{id}_{S^n}$.

(iii) Laat zien dat G triviaal is of isomorf met $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.