Introduction to Algebraic Topology, najaar 2017, oefenopgaven - week 1

Opgave 1. Een continue afbeelding $p\colon Y \to X$ heet open als voor elke open deelverzameling $V \subseteq Y$ het beeld $p(V) \subseteq X$ een open deelverzameling van X is. Laat zien dat een overdekkingsafbeelding $p\colon Y \to X$ open is.

Opgave 2. Zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding, en veronderstel dat Y wegsamenhangend is. Zij $x \in X$ een punt en laat $y, y' \in Y$ punten zijn in de vezel $Y_x = p^{-1}x$ van p over x. Volgens de Topologie syllabus, versie 9 juni 2017, Stelling 22.1, is er een natuurlijke rechtswerking van de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x)$ op de verzameling Y_x.

(o) Lees nog eens aandachtig Hoofdstuk 22 uit de Topologie syllabus.

(i) Laat zien dat de stabilisatoren Stab_y resp. $\mathrm{Stab}_{y'}$ van y resp. y' voor de genoemde rechtswerking geconjugeerde ondergroepen zijn van $\pi_1(X, x)$.

(ii) Laat zien dat de groepen $\pi_1(Y, y)$ en Stab_y op natuurlijke wijze isomorf zijn. Preciezer, laat zien dat de afbeelding $p_*\colon \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, x)$ injectief is, en dat het beeld $p_*(\pi_1(Y, y)) \subseteq \pi_1(X, x)$ gelijk is aan Stab_y.

(iii) In het bijzonder geldt: veronderstel dat Y enkelvoudig samenhangend is. Dan is de rechtswerking van $\pi_1(X, x)$ op Y_x vrij.

(iv) Veronderstel nu dat X enkelvoudig samenhangend is. Laat zien dat Y enkelvoudig samenhangend is. Beter nog: laat zien dat $p\colon Y \to X$ een homeomorfisme is.

Opgave 3. Zij I een verzameling, X een topologische ruimte en $f\colon X \to I$ een afbeelding (van verzamelingen).

(i) Laat zien dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

- de afbeelding f is continu, als I wordt voorzien van de discrete topologie;
- voor elke $x \in X$ is er een open omgeving $x \in U \subseteq X$ van x in X zodat f constant is op U.

Wanneer voor $f\colon X \to I$ beide equivalente uitspraken gelden, noemen we f een *lokaal constante* afbeelding.

(ii) Zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding waarbij voor elke $x \in X$ de vezel $Y_x = p^{-1}x$ slechts eindig veel elementen bevat. Laat zien dat de afbeelding $n\colon X \to \mathbb{Z}$ gegeven door $n(x) = \#(p^{-1}x)$ lokaal constant is.

(iii) Veronderstel dat X samenhangend is. Laat zien dat $n\colon X \to \mathbb{Z}$ constant is.

Opgave 4. (i) Laat I een niet-lege discrete topologische ruimte zijn. Laat X een topologische ruimte zijn. Laat zien dat de projectie $X \times I \to X$ op de eerste coördinaat een overdekkingsafbeelding is. Dergelijke overdekkingsafbeeldingen noemen we *triviaal.*

(ii) Laat $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding zijn. Zij $X' \subseteq X$ een deelruimte van X. Laat zien dat de beperking $p|_{p^{-1}X'}\colon p^{-1}X' \to X'$ van p tot $p^{-1}X' \subseteq Y$ een overdekkingsafbeelding is.

Laat $p\colon Y \to X$ en $q\colon Z \to X$ overdekkingsruimten zijn. Een *morfisme van overdekkingsruimten over* X is per definitie een continue afbeelding $r\colon Y \to Z$ zodat $p = q \circ r$. Wanneer r een homeomorfisme is, dan noemen we r een *isomorfisme van overdekkingsruimten over* X. Voor het gemak noemen we een overdekkingsruimte $p\colon Y \to X$ die isomorf is met een triviale overdekkingsruimte ook triviaal. We noemen een continue afbeelding $p\colon Y \to X$ *lokaal triviaal* als er een open overdekking $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ van X bestaat zodat voor alle $\alpha \in A$ de beperking $p|_{p^{-1}U_\alpha}\colon p^{-1}U_\alpha \to U_\alpha$ een triviale overdekkingsruimte is.

(iii) Laat zien dat een overdekkingsruimte $p\colon Y \to X$ lokaal triviaal is.

(iv) Omgekeerd, zij $p\colon Y \to X$ een lokaal triviale continue afbeelding. Bewijs dat $p\colon Y \to X$ een overdekkingsruimte is.

Opgave 5. Zij $n \geq 1$ een geheel getal en beschouw de sfeer

$$S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} = 0\}$$

als de evenaar van de sfeer $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Laat zien dat er geen retractie $S^1 \to S^0$ bestaat. Laat zien dat er geen retractie $S^2 \to S^1$ bestaat.