Introduction to Algebraic Topology, najaar 2017, oefenopgaven - week 5

Opgave 1. Zij $f\colon S^1 \to S^1$ een continue afbeelding en zij $\tilde{f}\colon S^1 \to S^1$ de continue afbeelding gegeven door $\tilde{f}(z) = f(z)/f(1)$.

(i) Laat zien dat f en $\tilde{f}$ homotoop zijn.

Er geldt $\tilde{f}(1) = 1$, en $\tilde{f}_*\colon \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ kan gezien worden als een homomorfisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ en dus als vermenigvuldiging met een geheel getal n. Dit gehele getal n noemen we de *graad*, of het *windingsgetal*, van f. Notatie: $\deg(f)$. Verifieer de volgende eigenschappen van de graad.

(ii) $\deg(\mathrm{id}_{S^1}) = 1$.

(iii) Als $f, g\colon S^1 \to S^1$ homotoop zijn, dan is $\deg(f) = \deg(g)$.

(iv) $\deg(z \mapsto z^n) = n$.

(v) Voor $f, g\colon S^1 \to S^1$ continu is $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$.

(vi) $\deg(-\mathrm{id}_{S^1}) = 1$.[1]

De volgende twee opgaven zijn bedoeld voor hen die nog niet geheel vertrouwd zijn met de begrippen "quotiënt(ruimte)", "quotiëntafbeelding" en "universele eigenschap van het quotiënt". De eerste opgave is een variant op Opgave 55 uit de Topologie syllabus, versie 9 juni 2017.

Opgave 2. Zij X een topologische ruimte en $\sim$ een equivalentierelatie op X. Een ruimte Q voorzien van een continue afbeelding $q\colon X \to Q$ heet een *quotiënt van de ruimte X naar de equivalentierelatie* $\sim$ als de volgende twee eigenschappen gelden: (1) voor alle $x, x' \in X$ met $x \sim x'$ geldt $q(x) = q(x')$; (2) zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding zodanig dat voor alle $x, x' \in X$ met $x \sim x'$ geldt dat $f(x) = f(x')$. Dan bestaat er een unieke continue afbeelding $\bar{f}\colon Q \to Y$ zodat $f = \bar{f} \circ q$. In dit geval noemen we $q\colon X \to Q$ de bijbehorende *quotiëntafbeelding*. We noemen eigenschap (2) de *universele eigenschap* van het quotiënt.

(i) Laat zien dat een quotiënt $q\colon X \to Q$ naar $\sim$ op een uniek homeomorfisme na uniek is. Dat wil zeggen: laat $q\colon X \to Q$ en $q'\colon X \to Q'$ quotiënten zijn naar $\sim$. Dan bestaat er een uniek homeomorfisme $g\colon Q \xrightarrow{\sim} Q'$ zodat $q' = g \circ q$.

De hierna volgende constructie laat zien dat een quotiënt naar $\sim$ bestaat. Beschouw de verzameling van equivalentieklassen $Q = X/\sim$, en zij $q\colon X \to Q$ de natuurlijke projectie gegeven door $x \in X$ naar haar equivalentieklasse $[x] \in Q$ te sturen. Noem een deelverzameling $U \subset Q$ open dan en slechts dan als $q^{-1}U$ open is in X.

(ii) Bewijs dat de open verzamelingen van Q een topologie vormen.

(iii) Laat zien dat de aldus geconstrueerde topologische ruimte Q tezamen met de projectie $q\colon X \to Q$ een quotiënt is van X naar $\sim$.

[1] Sterker nog, id_{S^1} en $-\mathrm{id}_{S^1}$ zijn homotoop. We zullen later zien: als n oneven is dan zijn id_{S^n} en $-\mathrm{id}_{S^n}$ homotoop, en als n even is, dan zijn id_{S^n} en $-\mathrm{id}_{S^n}$ *niet* homotoop. Bewijs deze laatste uitspraak alvast voor $n = 0$.

Opgave 3. Laat $p\colon Y \to X$ een surjectieve en open continue afbeelding zijn.

(i) Laat zien dat p een quotiëntafbeelding is.

(ii) In het bijzonder geldt: een overdekkingsafbeelding is een quotiëntafbeelding. Geef een korte beschrijving van de bijbehorende equivalentierelatie.

(iii) Zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Laat $\mu_n \subset \mathbb{C}^*$ de groep van n-e eenheidswortels zijn. De groep μ_n werkt even op $Y = S^1$ door vermenigvuldiging. Verifieer dat de overdekkingsafbeelding $p\colon Y \to S^1$ gegeven door $z \mapsto z^n$ een quotiëntafbeelding is voor de equivalentierelatie $\sim$ op Y gegeven door: $y \sim y' \Leftrightarrow$ er bestaat een $\zeta \in \mu_n$ zodat $\zeta \cdot y = y'$. In het bijzonder kan de overdekkingsafbeelding $p\colon Y \to S^1$ gegeven door $z \mapsto z^n$ vereenzelvigd worden met de quotiëntafbeelding $Y \to Y/\mu_n$.

(iv) Geef een voorbeeld van een quotiëntafbeelding $q\colon Y \to Q$ die niet open is.

(v) Geef een voorbeeld van een surjectieve continue afbeelding die geen quotiëntafbeelding is.

Opgave 4. Maak Exercise 13.29 uit Fulton.

Opgave 5. Classificeer, op isomorfie na, de samenhangende overdekkingsruimten van $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$). Kunt u de samenhangende overdekkingsruimten van de torus $T = S^1 \times S^1$ op isomorfie na beschrijven?

Vanaf hier zijn de basisruimtes $X_{(\dots)}$ samenhangend en lokaal wegsamenhangend.

Opgave 6. Laat $u_1\colon \tilde{X}_1 \to X_1$ en $u_2\colon \tilde{X}_2 \to X_2$ universele overdekkingsafbeeldingen zijn.

(i) Laat zien dat de productafbeelding $\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ gegeven door $(y_1, y_2) \mapsto (u_1(y_1), u_2(y_2))$ een universele overdekkingsafbeelding is.

(ii) Beschrijf een groepsisomorfisme $\mathrm{Aut}(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 / X_1 \times X_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\tilde{X}_1/X_1) \times \mathrm{Aut}(\tilde{X}_2/X_2)$.

Opgave 7. Zij $u\colon (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ een gepunte universele overdekkingsafbeelding.

(i) Laat $p\colon (Y, y) \to (X, x)$ een gepunte overdekkingsafbeelding zijn met Y samenhangend. Op college hebben we gezien dat er een unieke gepunte overdekkingsafbeelding $g\colon (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (Y, y)$ bestaat met $u = p \circ g$. Verifieer dat $\mathrm{Aut}(\tilde{X}/Y)$ een ondergroep is van $\mathrm{Aut}(\tilde{X}/X)$.

(ii) Op college is gezegd (maar niet bewezen) dat er een isomorfisme $\mathrm{Aut}(\tilde{X}/X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x)$ bestaat. Geef een presentatie door middel van voortbrengers en relaties van de fundamentaalgroep van de fles van Klein (cf. Huiswerkset 1, Opgave 1).

Opgave 8. Neem aan dat X een universele overdekkingsafbeelding $u\colon \tilde{X} \to X$ toelaat. Het doel van deze opgave is te laten zien dat de vraag naar de overdekkingsafbeeldingen $p\colon Y \to X$ gereduceerd kan worden tot de vraag naar de overdekkingsafbeeldingen $p\colon Y \to X$ *met* Y *samenhangend.*

(i) Zij A een niet-lege verzameling en voor elke $\alpha \in A$ zij $p_\alpha\colon Y_\alpha \to X$ een overdekkingsafbeelding met Y_α samenhangend. Zij $p\colon \sqcup_{\alpha \in A} Y_\alpha \to X$ de continue afbeelding gegeven door $y \in Y_\alpha$ naar $p_\alpha(y) \in X$ te sturen. Laat zien dat p een overdekkingsafbeelding is.

(ii) Zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding en laat Y_α voor $\alpha \in A$ de samenhangscomponenten zijn van Y. Dit zijn tegelijk ook de wegsamenhangscomponenten van Y, aangezien Y lokaal wegsamenhangend is. Laat zien dat de beperking $p|_{Y_\alpha}\colon Y_\alpha \to X$ van p tot Y_α een overdekkingsafbeelding is.