Introduction to Algebraic Topology, najaar 2017, oefenopgaven - week 8

Opgave 1. Zij $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Zij C^{n+1} de ruimte die verkregen wordt uit $[0,1] \times S^n$ door de deelruimte $\{0\} \times S^n$ samen te trekken tot een punt. Dat wil zeggen C^{n+1} is de quotiëntruimte $([0,1] \times S^n)/\sim$ voor de equivalentierelatie $\sim$ op $[0,1] \times S^n$ gegeven door $y \sim y' \Leftrightarrow y = y'$ of $y, y' \in \{0\} \times S^n$.

(i) Geef een homeomorfisme $C^{n+1} \xrightarrow{\sim} D^{n+1}$, waarbij D^{n+1} de gesloten eenheidsbal is in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Zij Σ^{n+1} de quotiëntruimte $([0,1] \times S^n)/\approx$ voor de equivalentierelatie $\approx$ op $[0,1] \times S^n$ gegeven door $y \approx y' \Leftrightarrow y = y'$ of $y, y' \in \{0\} \times S^n$ of $y, y' \in \{1\} \times S^n$.

(ii) Geef een homeomorfisme $\Sigma^{n+1} \xrightarrow{\sim} S^{n+1}$.

(iii) Laat zien dat S^{n+1} verkregen kan worden uit D^{n+1} door de rand $S^n \subset D^{n+1}$ samen te trekken tot een punt. Kunt u een expliciete continue afbeelding $f\colon D^{n+1} \to S^{n+1}$ opschrijven die deze identificatie realiseert?

(iv) Zij $p \in S^{n+1}$ een punt. Laat zien dat $S^{n+1} \setminus \{p\}$ homeomorf is met de open eenheidsbal in $\mathbb{R}^{n+1}$ en dus met $\mathbb{R}^{n+1}$ zelf.

Opgave 2. Zij X een topologische ruimte en $i\colon A \subset X$ een deelruimte. Zij $r\colon X \to A$ een continue afbeelding. We noemen r een *retractie* als $r \circ i = \mathrm{id}_A$. Een retractie $r\colon X \to A$ heet een *deformatieretractie* als er een homotopie bestaat van de continue afbeelding $i \circ r\colon X \to X$ naar id_X.

(i) Zij $r\colon X \to A$ een deformatieretractie. Zij $x \in A$ een punt. Laat zien dat $r_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(A,x)$ en $i_*\colon \pi_1(A,x) \to \pi_1(X,x)$ isomorfismes zijn, en elkaars inverse.

(ii) Zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Geef een deformatieretractie $r\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$. Bepaal hiermee de fundamentaalgroep van $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

(iii) Zij p het punt $(1/2, 1/2)$ in het eenheidsvierkant $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Laat B de rand zijn van I. Geef een deformatieretractie $r\colon I^2 \setminus \{p\} \to B$.

(iv) Realiseer de torus $T = S^1 \times S^1$ op natuurlijke wijze als een quotiënt van $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Laat zien dat het beeld van B in T homeomorf is met de 8-figuur. Zij q het beeld van $p = (1/2, 1/2)$ in T. Laat zien dat er een deformatieretractie van $T \setminus \{q\}$ naar de 8-figuur bestaat. Bepaal hiermee de fundamentaalgroep van $T \setminus \{q\}$.

Opgave 3. Laat X een ruimte zijn die lokaal enkelvoudig samenhangend is. Dat wil zeggen, voor elke $x \in X$ en elke open omgeving U van x in X bestaat er een open omgeving V van x met $V \subset U$ en V enkelvoudig samenhangend. (In het bijzonder is X lokaal wegsamenhangend.) Laat nu $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding zijn, en laat $q\colon Z \to Y$ een overdekkingsafbeelding zijn. Bewijs dat de samenstelling $p \circ q\colon Z \to X$ een overdekkingsafbeelding is.

Opgave 4. Zij X een ruimte die samenhangend is en lokaal wegsamenhangend. Voor een gepunte reguliere overdekking $p\colon (Y, y) \to (X, x)$ hebben we op college een surjectief groepshomomorfisme $\rho = \rho_y\colon \pi_1(X,x) \to \mathrm{Aut}(Y/X)$ gedefinieerd. Laat y' een ander punt zijn in de vezel boven x en bekijk het surjectief groepshomomorfisme $\rho_{y'}\colon \pi_1(X,x) \to \mathrm{Aut}(Y/X)$ dat bij y' hoort. Laat zien dat ρ_y en $\rho_{y'}$ van elkaar verschillen met een inwendig automorfisme van $\mathrm{Aut}(Y/X)$.

Opgave 5. Zij X een topologische ruimte en G een groep.

(i) Een G-overdekking van X die triviaal is als overdekking is triviaal als G-overdekking van X. Bewijs dit.

(ii) Laat zien: een G-overdekking van X is lokaal een triviale G-overdekking.

(iii) Een morfisme van G-overdekkingen over X (dat wil zeggen, een morfisme van overdekkingsafbeeldingen over X dat G-equivariant is) is een homeomorfisme (dus een isomorfisme van (G-)overdekkingen).

(iv) Een (homeo)morfisme van gepunte G-overdekkingen over X is uniek zodra hij bestaat.

(v) Laat U, V open deelverzamelingen zijn van X met $X = U \cup V$. Laat $p_1 \colon Y_1 \to U$ en $p_2 \colon Y_2 \to V$ twee G-overdekkingen zijn en zij $\vartheta \colon p_1^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\sim} p_2^{-1}(U \cap V)$ een isomorfisme van G-overdekkingen over $U \cap V$. Laat zien dat de overdekkingsafbeelding $p \colon Y \to X$ verkregen door p_1, p_2 te plakken langs ϑ een G-overdekking is, compatibel met de structuur van G-overdekking van zowel p_1 als p_2.

Opgave 6. Laat zien dat er een samenhangende S_3-overdekking van de 8-figuur bestaat. Laat zien dat er een samenhangende $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$-overdekking van de 8-figuur bestaat. Laat zien dat er geen samenhangende $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$-overdekking van de 8-figuur bestaat.

Opgave 7. Zij $X = S^1$ en laat $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Laat U, V twee open deelverzamelingen van X zijn, beide homeomorf met een open interval, zodat $X = U \cup V$, en zodat $U \cap V$ de disjuncte vereniging is van twee open intervallen. Beschrijf de G-overdekkingen van U, V en $U \cap V$, en hun automorfismen. Volgens Fulton Hoofdstukken 14b, c verkrijgen we een G-overdekking van X door een G-overdekking $p_1 \colon Y_1 \to U$ en een G-overdekking $p_2 \colon Y_2 \to V$ te plakken langs een homeomorfisme van G-overdekkingen $\vartheta \colon p_1^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\sim} p_2^{-1}(U \cap V)$. Tevens kunnen alle G-overdekkingen van X op deze wijze verkregen worden. Beschrijf de homeomorfismen ϑ voor de triviale G-overdekking $X \times G \to X$ en de G-overdekking $S^1 \to X$ gegeven door $z \mapsto z^2$.

Opgave 8. Laat zien dat er geen opens U, V van $X = S^1$ bestaan zodat tegelijk aan de drie volgende eisen is voldaan: $X = U \cup V$; U en V zijn enkelvoudig samenhangend; $U \cap V$ is wegsamenhangend.

Opgave 9. Laat B, C twee groepen zijn. Laat zien dat $B * C$ en $C * B$ kanoniek isomorf zijn.