1 Voorkennis

Zij V een eindig dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte.

Definitie 1.1 (Alternerende afbeelding)**.**
Een multilineaire afbeelding $f : V^k \to \mathbb{R}$ heet *alternerend* als

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f(v_1, \ldots, v_k),$$

voor alle $v_1, \ldots, v_k \in V$ en $\sigma \in S_k$.

Definitie 1.2 (Exterior power)**.**
De vectorruimte

$$\Lambda^k(V^*) = \{f : V^k \to \mathbb{R} : f \text{ multilineair en alternerend}\}$$

heet de *kth exterior power* van V^*.

Zij X een differentieerbare manifold.

Definitie 1.3 (Exterior bundle)**.**
Zij T_xX de raakruimte aan X in $x \in X$. Definieer

$$\Lambda^k(T^*X) = \coprod_{x \in X} \Lambda^k(T_x^*X)$$

en laat $\pi : \Lambda^k(T^*X) \to X$ de unieke afbeelding zijn met $\pi^{-1}(x) = \Lambda^k(T_x^*X)$.

<u>Claim:</u> er bestaat een natuurlijke topologie en differentieerbare structuur op $\Lambda^k(T^*X)$ en een natuurlijke trivialiserende overdekking z.d.d. $\Lambda^k(T^*X) \xrightarrow{\pi} X$ een vector bundel is.

Definitie 1.4 (Differentiaalvorm)**.**
Een *differentiaalvorm* (of een *k-vorm*) op X is een sectie[1] $\omega : X \to \Lambda^k(T^*X)$ van de exterior bundle. Laat $\Omega^k(X) := A^0(\Lambda^k(T^*X))$ de vectorruimte van k-vormen zijn.

Definitie 1.5 (Lokaal frame)**.**
Zij $E \xrightarrow{\pi} X$ een vector bundel met $\dim\big(\pi^{-1}(x)\big) = m$ en laat $U \subseteq X$ een open deelverzameling zijn. Als $e_1, \ldots, e_m : U \to E$ secties zijn met de eigenschap dat $e_1(x), \ldots, e_m(x) \in E_x := \pi^{-1}(x)$ een basis is voor E_x voor alle $x \in U$, dan noemen we $e_1, \ldots, e_m$ een *lokaal frame*.

[1]Reminder: een *sectie* van een vector bundel $E \xrightarrow{\pi} X$ is een gladde afbeelding $s : X \to E$ met $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$. Merk op: $s(x) \in E_x := \pi^{-1}(x)$.