De Jacobiaan van een metrische graaf (begeleider: R. de Jong)

Een *metrische graaf* is een compacte, samenhangende metrische ruimte (Γ, d) zodat voor elke $x \in \Gamma$ er een $n \in \mathbb{N}$ en een $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zodat x een open omgeving heeft die isometrisch is met de "ster met n stralen"

$$S(n, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \text{er zijn } 0 \leq t < \epsilon \text{ en } k \in \mathbb{Z} \text{ zodat } z = t\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n}\}\,,$$

voorzien van de kortste-weg metriek. Als Γ een metrische graaf is dan ligt voor elke $x \in \Gamma$ het element $n \in \mathbb{N}$ eenduidig vast; dit getal wordt de *valentie* van x genoemd. Zij V_0 de verzameling van $x \in \Gamma$ waarvan de valentie niet gelijk is aan 2. Opgave: de verzameling V_0 is eindig.

De metriek d wordt gegeven door de kortste weg (geodetische afstand). Metrische grafen spelen een belangrijke rol in veel gebieden binnen de wis- en natuurkunde, van optimalisering en kansrekening (random walks) via de theorie van elektrische circuits tot aritmetische algebraïsche meetkunde. De keus van een eindige deelverzameling $V \subset \Gamma$ die V_0 bevat geeft aanleiding tot een samenhangende gewogen graaf $G = (V, E, \ell)$, d.w.z. elke kant $e \in E$ heeft een gewicht/lengte $\ell(e) \in \mathbb{R}_{>0}$. Anderzijds geeft een samenhangende gewogen graaf $G = (V, E, \ell)$ aanleiding tot een metrische graaf.

Naast de geodetische afstand $d \colon \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$ beschouwt men dikwijls ook de zogenaamde effectieve weerstand $r \colon \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$. Dit is ook een metriek op Γ, en de topologie verandert niet door over te gaan op r. Een manier om r te definiëren vindt men binnen de taal van elektrische circuits: als $x, y \in V$ twee hoekpunten zijn van een gewogen graaf $G = (V, E, \ell)$ dan wordt de effectieve weerstand $r(x, y)$ gegeven door (de absolute waarde van) het potentiaalverschil (in Volt) dat nodig is tussen x en y om een stroom van 1 Ampère door het door G gegeven elektrische circuit te laten lopen, waarbij 1 Ampère het netwerk binnenkomt bij x, en 1 Ampère het netwerk uitgaat bij y. De weerstanden in het netwerk worden gegeven door de gewichtsfunctie ℓ. Om de "connectiviteit" van een gewogen graaf te bepalen blijkt het beter te zijn om met r dan om met d te werken.

In dit project onderzoeken we (onder andere) het verschil $d - r$ tussen de geodetische afstand en de effectieve weerstand. Dit verschil is altijd ≥ 0 (wat is hiervan het fraaiste bewijs?), en is gelijk aan 0 precies als de graaf een boom is (er bestaan voor de hand liggende verfijningen van dit resultaat). De topologie van Γ speelt hier een rol, in het bijzonder het Betti-getal $g = e - v + 1$, waarbij $v = |V|$, $e = |E|$. Met wat algebraïsche topologie definieert men een rooster behorende bij Γ, d.w.z een eindig voortgebrachte vrije abelse groep $H_{\mathbb{Z}}$ tezamen met een inproduct $Q(\cdot, \cdot)$ op de reële vectorruimte $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$. Het verschil $d - r$ kan direct worden uitgedrukt in termen van $Q(\cdot, \cdot)$ en de zogenaamde Abel-Jacobi afbeelding $a \colon \Gamma \times \Gamma \to J$. Hierin is $J = H_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{Z}}$ de zogenaamde *jacobiaan* van Γ. Er geldt $\dim H_{\mathbb{R}} = g$.

Doel van dit project is om de hier gesuggereerde relatie tussen $d - r$ en J te bewijzen, en om eventueel nog meer eigenschappen van Γ te onderzoeken in termen van de jacobiaan J en de Abel-Jacobi afbeelding. Verbanden met o.a. de Laplaciaan van een gewogen graaf worden uitgediept. Er zou een "theorie" kunnen/moeten ontstaan die veel parallellen vertoont met de theorie van compacte Riemannoppervlakken en hun Jacobianen. De functie r zou hierin moeten corresponderen met (een genormaliseerde versie van) de zogenaamde "Riemann priemvorm". Als er tijd over is, kan ook deze analogie worden uitgewerkt.