Dessins d'enfants (begeleider: R. de Jong)

Voor een topologische ruimte X zijn de zogenaamde *overdekkingsafbeeldingen* $p\colon Y \to X$ van belang. Een surjectieve continue afbeelding $p\colon Y \to X$ heet een overdekkingsafbeelding als voor iedere $x \in X$ een open omgeving U van x in X bestaat zodat $p^{-1}U$ gelijk is aan een disjuncte vereniging van open deelverzamelingen V_i van Y zodanig dat voor elke i de beperking van p tot V_i een homeomorfisme geeft naar U.

Zij $x \in X$ een punt en $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding. Laat $\pi_1(X, x)$ de fundamentaalgroep zijn van X met basispunt x. De zogenaamde monodromiewerking van $\pi_1(X, x)$ op de vezel $Y_x = p^{-1}x$ van Y boven x speelt een belangrijke rol. Zij geeft aanleiding tot een zogenaamde *vezelfunctor* van de "categorie" van overdekkingsafbeeldingen naar X naar de "categorie" van rechts-$\pi_1(X, x)$-verzamelingen.

Allereerst zullen we in dit project deze vezelfunctor nader onderzoeken, en onder andere bewijzen dat zij, onder geschikte voorwaarden op X, een zogenaamde equivalentie van categorieën is. Voor algemene (X, x) geeft de vezelfunctor een alternatieve methode om de fundamentaalgroep van (X, x) te definiëren, en het is interessant om te kijken hoe deze alternatieve definitie zich verhoudt tot de meer traditionele.

In het tweede deel van dit project zullen we inzoomen op het voorbeeld waarin voor X het complexe vlak wordt gekozen, met daaruit de twee punten 0 en 1 weggelaten. De relevante fundamentaalgroep is nu $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, een vrije groep op twee elementen. De categorie van $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$-verzamelingen laat een aantal interessante beschrijvingen toe, en één daarvan gaat via zogenaamde *dessins d'enfants* (kindertekeningen).

Uiteindelijke doel van dit onderzoek is om een aantal voorbeelden en toepassingen van dessins d'enfants te onderzoeken. Zo kan men bijvoorbeeld, gegeven de theorie van dessins d'enfants, op redelijk eenvoudige wijze een antwoord geven op de volgende vraag: zij $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ gegeven. Wat is de minimale graad van niet-nul polynomen h van de vorm $h = f^3 - g^2$, waarbij $f, g \in \mathbb{C}[t]$ van gegeven graad $2m$ resp. $3m$ zijn? Ook kunnen (alle) voorbeelden met minimale m (in zekere zin) worden geconstrueerd. Kan men varianten op de vergelijking $h = f^3 - g^2$ op gelijkaardige wijze analyseren?

Voorkennis: Algebra 1, 2, 3, Topologie. Het college Introduction to Algebraic Topology is nuttig maar niet noodzakelijk.

Literatuursuggesties

A. K. Zvonkin, *Belyi functions: examples, properties and applications.* In: J. Koolen, J. H. Kwak, M.-Y. Xu (eds.), Applications of Group Theory to Combinatorics. Taylor & Francis Group, London, 2008.

L. Schneps, *Dessins d'enfants on the Riemann sphere.* In: L. Schneps (ed.), The Grothendieck theory of dessins d'enfants. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

U. Zannier, *On Davenport's bound for the degree of $f^3 - g^2$ and Riemann's Existence Theorem.* Acta Arithmetica 71 (1995), 107–137.