Primitieve wortels in getallenlichamen

Een geheel getal a heet een *primitieve wortel* modulo een priemgetal p als $(a \bmod p)$ een voortbrenger is van de groep $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ van inverteerbare restklassen modulo p. Omdat $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ een cyclische groep is, bestaan er voor ieder priemgetal p oneindig veel primitieve wortels $a \in \mathbf{Z}$.

Omgekeerd kan men, zoals Artin in 1927 deed, zich afvragen of een geheel getal $a \neq 0$, of algemener een rationaal getal $a \in \mathbf{Q}^*$, een primitieve wortel is modulo oneindig veel priemgetallen p. Een evident noodzakelijke voorwaarde hiervoor is dat a niet gelijk is aan -1, en dat a geen kwadraat is in $\mathbf{Q}^*$. Het blijkt niet zo makkelijk om te bewijzen dat deze noodzakelijke voorwaarde ook voldoende is: het enige bekende 'bewijs' maakt gebruik van een bekend onbewezen vermoeden, de Riemann-hypothese voor getallenlichamen (GRH). Onder GRH weet men ook, zoals Artin al vermoedde, dat de verzameling van priemgetallen waarvoor a een primitieve wortel is, een dichtheid heeft die 0 is dan en slechts dan als a modulo slechts eindig veel p een primitieve wortel is.

In dit project kijken we naar de analoge situatie in getallenlichamen, lichamen K van eindige graad over $\mathbf{Q}$. Zulke lichamen hebben restklassenlichamen $k_{\mathbf{p}}$ modulo priemen $\mathbf{p}$ die eindig zijn, en waarvan de eenhedengroep dus cyclisch is. Voor een element $x \in K^*$ kan men zich weer afvragen of het een primitieve wortel is modulo oneindig veel priemen $\mathbf{p}$ van K. Het doel is om ook hier de obstructies in kaart te brengen die impliceren dat $x \in K^*$ slechts modulo eindig veel $\mathbf{p}$ een primitieve wortel is, en voorbeelden te construeren van paren (x, K) met $x \in K^*$ waarvoor de index $[k_{\mathbf{p}}^* : \langle x \bmod \mathbf{p} \rangle]$ voor bijna alle $\mathbf{p}$ groter dan 1 is, maar *niet*, zoals in het geval van $\mathbf{Q}$, voor bijna alle $\mathbf{p}$ deelbaar door een vast geheel getal $d > 1$. Voor dergelijke constructies heeft men GRH niet nodig.

De gebruikte technieken gaan terug op een artikel van Hendrik Lenstra (Inventiones, 1977), en leiden tot een karakterisering in termen van Galoistheorie voor bepaalde radicaaluitbreidingen van K. Voor dit project moet men zich de nodige algebraische getaltheorie eigen maken, en goed vertrouwd zijn of raken met Galoistheorie.

Begeleider: Peter Stevenhagen