Opgave 1 Laat $D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ de n-dimensionale massieve bol in $\mathbb{R}^n$ zijn. Laat $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\} = \partial D^{n+1}$ de n-dimensionale sfeer in $\mathbb{R}^{n+1}$ zijn.
(i) Construeer een surjectieve continue afbeelding $f : D^n \to S^n$ die de rand $\partial D^n = S^{n-1}$ samentrekt tot één punt en injectief is op het inwendige van D^n.
We schrijven D^n/S^{n-1} voor de quotiëntruimte van D^n gedefinieerd door de equivalentierelatie $x \sim y :\Leftrightarrow x = y$ of $x, y \in \partial D^n = S^{n-1}$. Laat $p : D^n \to D^n/S^{n-1}$ de natuurlijke projectie zijn.
(ii) Bewijs dat f te schrijven is als $f = \overline{f} \circ p$ met $\overline{f} : D^n/S^{n-1} \to S^n$ een bijectieve, continue afbeelding (gebruik de universele eigenschap van het quotiënt).
(iii) Concludeer dat D^n/S^{n-1} homeomorf is met S^n (gebruik Opgave 4.4).
(iv) Bewijs dat S^n de éénpuntscompactificatie is van $\mathbb{R}^n$. (Hint: het inwendige van D^n is homeomorf met $\mathbb{R}^n$.)

Opgave 2 Definieer op $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ een metriek d volgens $d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} |x(i) - y(i)| \cdot 2^{-i}$.
(i) Bewijs dat de door d gedefinieerde topologie op X gelijk is aan de op college gedefinieerde (product)topologie op X. (Hint: bewijs dat beide topologieën eenzelfde basis hebben.)
(ii) Bewijs dat X ten aanzien van d totaal begrensd (d.w.z. precompact) en volledig is.
(iii) Concludeer dat X compact is.