1 Metrische ruimten

Opgave 1.1. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de doorsnede van *oneindig* veel open verzamelingen in een metrische ruimte niet open hoeft te zijn.

Opgave 1.2. Zij X een metrische ruimte. Bewijs: $U \subset X$ is open $\Leftrightarrow$ U is een vereniging van open bollen.

Opgave 1.3. *(Hammingafstand)* Zij $n \geq 1$ een geheel getal. Een deelverzameling $C \subset \{0,1\}^n$ heet een *code van lengte n*. De *Hammingafstand* op C is de afbeelding $d : C \times C \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeven door $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \#\{1 \leq i \leq n : x_i \neq y_i\}$ voor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ in C.
(i) Bewijs dat d een metriek is op C.
(ii) Zij $e \geq 0$ een geheel getal. Bewijs: de code C is e-fouten-verbeterend $\Leftrightarrow$ $d(x, y) \geq 2e + 1$ voor alle $x, y \in C$ met $x \neq y$.

Opgave 1.4. *(p-adische metriek)* Zij p een priemgetal. Voor een $x \in \mathbb{Q}^*$ schrijven we $\mathrm{ord}_p(x) = n$ als $x = p^n \cdot \frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{Z}$ niet deelbaar door p en met $n \in \mathbb{Z}$. Vervolgens schrijven we $|x|_p = p^{-\mathrm{ord}_p(x)}$ en zetten we $|0|_p = 0$. We definiëren een afbeelding $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ volgens $d(x, y) = |x - y|_p$.
(i) Bewijs dat d een metriek is op $\mathbb{Q}$.
(ii) Bewijs de volgende sterkere vorm van de driehoeksongelijkheid: zijn $x, y, z \in \mathbb{Q}$, dan $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$ en $d(x, z) = \max(d(x, y), d(y, z))$ als $d(x, y) \neq d(y, z)$.
(iii) Bewijs dat de eenheidsbol $B_p = \{x \in \mathbb{Q} : |x|_p \leq 1\}$ een deelring is van $\mathbb{Q}$.

2 Topologische ruimten

Opgave 2.1. Bepaal alle topologieën op de verzameling $X = \{a, b, c\}$. Geef voor al deze topologieën een zo klein mogelijke basis. Ga na welke van deze topologieën Hausdorffs zijn.

In de onderstaande opgaven is X steeds een topologische ruimte.

Opgave 2.2. Zij $\mathcal{V}$ de collectie gesloten verzamelingen van X. Bewijs:
(**G1**) $\varnothing, X \in \mathcal{V}$;
(**G2**) voor elke deelcollectie $\{G_\alpha\}$ van $\mathcal{V}$ geldt dat $\cap_\alpha G_\alpha \in \mathcal{V}$;
(**G3**) voor elke eindige deelcollectie $\{G_\alpha\}$ van $\mathcal{V}$ geldt dat $\cup_\alpha G_\alpha \in \mathcal{V}$.
Bewijs verder dat als $\mathcal{V}$ een collectie deelverzamelingen is van X die aan (G1)–(G3) voldoet, er een unieke topologie op X is waarvoor de elementen van $\mathcal{V}$ de gesloten verzamelingen zijn.

Opgave 2.3. Laat A, B deelverzamelingen zijn van X. Bewijs of weerleg:
(i) $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$;
(ii) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.

Opgave 2.4. Laat A, B deelverzamelingen zijn van X. Bewijs of weerleg:
(i) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$;
(ii) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$.

Opgave 2.5. Zij A een deelverzameling van X. Bewijs: $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ en $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Opgave 2.6. Zij A een deelverzameling van X. Bewijs: A is open $\Leftrightarrow A = A^\circ$. Bewijs: A is gesloten $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Opgave 2.7. Zij A een deelverzameling van X. Een punt $x \in X$ heet *ophopingspunt* van A als iedere open omgeving van x een niet-lege doorsnede heeft met A.
(i) Bewijs: $x \in \partial A \Leftrightarrow x$ is een ophopingspunt van zowel A als $X \setminus A$.
(ii) Bewijs: A is gesloten $\Leftrightarrow A$ bevat al zijn ophopingspunten.
(iii) Bewijs dat $\overline{A}$ gelijk is aan de verzameling ophopingspunten van A.

Opgave 2.8. Zij (X, d) een metrische ruimte, A een deelverzameling van X. Voor $x \in X$ definiëren we de *afstand* van x tot A als $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$. Bewijs dat $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

Opgave 2.9. Bewijs: X is discreet $\Leftrightarrow$ voor elke $x \in X$ is $\{x\}$ open in X.

Opgave 2.10. Neem aan dat X eindig is. Bewijs: X is Hausdorffs $\Leftrightarrow X$ is discreet.

Opgave 2.11. Zij A een deelverzameling van X. Bewijs: A ligt dicht in $X \Leftrightarrow$ voor elke niet-lege open verzameling U van X geldt $A \cap U \neq \varnothing$.

Opgave 2.12. Beschouw $X = \mathbb{R}$ met de halfrechte-topologie en zij $x \in X$.
(i) Bepaal de afsluiting $\overline{\{x\}}$ van x.
(ii) Laat $A = (-\infty, x]$. Bepaal $A^\circ, \overline{A}$ en ∂A. Idem voor $A = [x, \infty)$.

Opgave 2.13. Bewijs dat een verzameling X met de discrete topologie metriseerbaar is.

Opgave 2.14. Zij $X = \mathbb{R}$ en zij $\mathcal{U}$ de collectie deelverzamelingen van de vorm $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ waarbij $a, b \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $\mathcal{U}$ een basis vormt voor een topologie op X en dat elk element van $\mathcal{U}$ zowel open als gesloten is in deze topologie. Bewijs dat deze topologie geen aftelbare basis heeft (zie ook Opgave 8.7).

Opgave 2.15. *(Co-eindige topologie)* Zij X een verzameling en zij $\mathcal{V}$ de collectie deelverzamelingen van X bestaande uit $\varnothing, X$ en de eindige deelverzamelingen van X.
(i) Laat zien dat de elementen van $\mathcal{V}$ de gesloten verzamelingen vormen van een topologie op X.
(ii) Is deze topologie Hausdorffs?
(iii) Bewijs dat de collectie $\{X \setminus \{x\}\}$, waarbij x door X loopt, een subbasis is voor de co-eindige topologie op X.
(iv) Veronderstel dat X oneindig is, en laat A een deelverzameling van X met zowel A als $X \setminus A$ oneindig. Bepaal ∂A.

Opgave 2.16. *(Zariski-topologie)* Noem een deelverzameling X van $\mathbb{R}^n$ gesloten als X nulpuntsverzameling is van een stel polynomen in $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.
(i) Bewijs dat we hiermee de gesloten verzamelingen krijgen van een topologie op $\mathbb{R}^n$.
(ii) Bewijs dat deze topologie grover is dan de euclidische topologie.
(iii) Bewijs verder dat voor $n = 1$ de Zariski-topologie dezelfde is als de co-eindige topologie.

Opgave 2.17. Zij p een priemgetal. Bewijs dat $\mathbb{Z}$ dicht ligt in de eenheidsbol B_p met de p-adische topologie (zie Opgave 1.4).

3 Continue afbeeldingen

Opgave 3.1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een afbeelding. Bewijs: f is continu $\Leftrightarrow$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt: zij $\epsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ zó dat als $|x - y| < \delta$, dan is $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Opgave 3.2. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding. Bewijs dat de verzameling fixpunten van f gesloten is. Bewijs verder dat de verzameling $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ gesloten is.

Opgave 3.3. Zij (X, d) een metrische ruimte en $y \in X$. Bewijs dat de afbeelding $X \to \mathbb{R}$ gegeven door $x \mapsto d(x, y)$ continu is.

Opgave 3.4. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat het beeld van een open verzameling onder een continue afbeelding niet open hoeft te zijn.

Opgave 3.5. Zijn (X, d) en (X', d') metrische ruimten en $f : X \to X'$ een afbeelding. We noemen f een *isometrie* als $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ voor alle $x, y \in X$. Bewijs dat een isometrie injectief en continu is.

Opgave 3.6. Zij X een verzameling. Bepaal alle continue afbeeldingen $X \to \mathbb{R}$ als:
(i) X voorzien is van de discrete topologie;
(ii) X voorzien is van de triviale topologie;
(iii) X voorzien is van de co-eindige topologie.

Opgave 3.7. Zij X een topologische ruimte en A een deelverzameling van X, voorzien van de geïnduceerde topologie. Laat zien dat de inclusie $i : A \to X$ een continue afbeelding is. Bewijs verder dat de geïnduceerde topologie op A de grofste topologie op A is waarvoor de inclusie continu is.

Opgave 3.8. Bewijs dat $\mathbb{R}$ homeomorf is met een open interval zowel als met een open halfrechte.

Opgave 3.9. Zij $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ een boloppervlak en $x \in S^2$. Bewijs dat $S^2 \setminus \{x\}$ homeomorf is met $\mathbb{R}^2$.

Opgave 3.10. Geef een voorbeeld van een bijectieve continue afbeelding $f : X \to Y$ waarvoor f^{-1} niet continu is.

4 Compactheid

Opgave 4.1. Zij X een Hausdorffse topologische ruimte en laat A, B twee compacte deelruimten zijn van X. Bewijs dat $A \cap B$ ook compact is.

Opgave 4.2. Bepaal de compacte deelruimten van $\mathbb{R}$ met de halfrechte-topologie. Laat zien dat een compacte deelruimte van een topologische ruimte niet gesloten hoeft te zijn.

Opgave 4.3. Bewijs dat $\mathbb{R}$ met de co-eindige topologie compact is.

Opgave 4.4. Zij X een compacte ruimte, Y een Hausdorffse ruimte en $f : X \to Y$ een bijectieve continue afbeelding. Bewijs: f is een homeomorfisme.

Opgave 4.5. Kan een Peano-kromme $f : [0,1] \to [0,1]^2$ ook injectief zijn?

Opgave 4.6. *(Lemma van Lebesgue)* Zij (X, d) een metrische ruimte en A een deelverzameling van X. We definiëren de *diameter* van A als $\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$. Bewijs: als X compact is, dan is er voor iedere overdekking $\{U_\alpha\}$ van X een $\delta > 0$ zó dat iedere deelverzameling van X met diameter $< \delta$ bevat is in een element van $\{U_\alpha\}$.

Opgave 4.7. *(Uniforme continuïteit)* Zijn $(X, d), (X', d')$ metrische ruimten. Een continue afbeelding $f : X \to X'$ heet *uniform continu* als voor iedere $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zó dat als $d(x, y) < \delta$ voor $x, y \in X$, dan $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.
(i) Geef een voorbeeld van een continue afbeelding die niet uniform continu is.
(ii) Bewijs: als X compact is, dan is elke continue afbeelding $f : X \to X'$ uniform continu. Hint: gebruik het Lemma van Lebesgue.

Opgave 4.8. Zij $X = \mathbb{R}$ met de halfrechte-topologie.
(i) Bewijs dat X niet compact is.
(ii) Bewijs dat iedere oneindige deelverzameling van X een verdichtingspunt heeft.

Opgave 4.9. *(Lokaal compactheid)* Een topologische ruimte X heet *lokaal compact* als voor iedere $x \in X$ er een open omgeving U is en een compacte deelruimte A zodat $x \in U \subset A$.
(i) Bewijs dat een compacte ruimte lokaal compact is.
(ii) Geef een voorbeeld van een lokaal compacte ruimte die niet compact is.
(iii) Laat zien dat de Hilbertruimte niet lokaal compact is.

5 Samenhang

Opgave 5.1. Bepaal de samenhangende deelverzamelingen in $\mathbb{R}$ met de
(i) co-eindige topologie;
(ii) halfrechte-topologie.

Opgave 5.2. Laat zien dat $\mathbb{R}$ niet homeomorf is met $\mathbb{R}^n$ voor $n \geq 2$.

Opgave 5.3. Zij $f : [0,1] \to [0,1]$ een homeomorfisme. Bewijs dat $f(0) = 0$ of $f(0) = 1$.

Opgave 5.4. Laat zien dat de cirkel en de achtfiguur niet homeomorf zijn.

Opgave 5.5. Zij X de deelverzameling van (x, y) in $\mathbb{R}^2$ met op zijn minst één der x, y rationaal. Bewijs dat X met de geïnduceerde topologie samenhangend is.

Opgave 5.6. Zij X een niet-lege samenhangende topologische ruimte en $f : X \to Y$ een continue afbeelding naar een discrete ruimte. Bewijs dat f constant is.

Opgave 5.7. *(Componenten)* Zij X een topologische ruimte en zij $x \in X$ een punt. De *(samenhangs)component* van x is de vereniging van alle samenhangende deelruimten van X die x bevatten.
(i) Bewijs dat een component samenhangend is.
(ii) Bewijs dat X de disjuncte vereniging is van zijn componenten.
(iii) Bewijs: X is samenhangend $\Leftrightarrow$ X heeft precies één component.
(iv) Bewijs dat een component gesloten is.
(v) Bepaal de componenten van $\mathbb{Q}$. Concludeer dat een component niet open hoeft te zijn.

Opgave 5.8. *(Lokale samenhang)* Een topologische ruimte X heet *lokaal samenhangend* als voor iedere $x \in X$ en voor iedere open omgeving U van x er een samenhangende verzameling A en een open omgeving V van x bestaan zo dat $V \subset A \subset U$.
(i) Geef een voorbeeld van een lokaal samenhangende ruimte die niet samenhangend is.
(ii) Voor $n \geq 1$ geheel laat X_n het gesloten lijnstuk zijn dat $(0, 1)$ en $(1/n, 0)$ in $\mathbb{R}^2$ met elkaar verbindt. Laat X de afsluiting zijn van $\cup_{n=1}^{\infty} X_n$. Bewijs dat X samenhangend is maar niet lokaal samenhangend.
(iii) Bewijs dat in een lokaal samenhangende ruimte iedere samenhangscomponent open is.

Opgave 5.9. Bewijs dat het beeld van een wegsamenhangende ruimte onder een continue afbeelding weer wegsamenhangend is.

Opgave 5.10. Zij X de afsluiting in $\mathbb{R}^2$ van de grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \sin(1/x)$. Bewijs dat X samenhangend is, maar niet wegsamenhangend.

Opgave 5.11. *(Lokale wegsamenhang)* Een topologische ruimte X heet *lokaal wegsamenhangend* als voor iedere $x \in X$ en voor iedere open omgeving U van x er een wegsamenhangende verzameling A en een open omgeving V van x bestaan zo dat $V \subset A \subset U$. Laat zien dat een samenhangende, lokaal wegsamenhangende topologische ruimte wegsamenhangend is.

Opgave 5.12. *(Eenpuntscompactificatie)* Zij X een lokaal compacte Hausdorffruimte. Zij ∞ een 'abstract punt', dat geen punt van X is. Noem $X' = X \cup \infty$.
(i) Bewijs dat op X' een topologie wordt verkregen door als open verzamelingen te nemen: de open verzamelingen van X, en de complementen in X' van compacte verzamelingen in X.
(ii) Bewijs dat de geïnduceerde topologie op X gelijk is aan de oorspronkelijke topologie.
(iii) Bewijs dat X' compact en Hausdorffs is.
(iv) Neem aan dat X samenhangend is. Bewijs: X' is samenhangend $\Leftrightarrow$ X is niet compact.
(v) Wat is de eenpuntscompactificatie van $\mathbb{R}$? En van $\mathbb{R}^2$?

6 Producten

Opgave 6.1. Zijn X, Y topologische ruimten, A een deelverzameling van X en B een deelverzameling van Y. Bewijs of weerleg:

(i) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$;
(ii) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.

Opgave 6.2. Zijn X, Y topologische ruimten. Bewijs dat de producttopologie op $X \times Y$ de grofste topologie is op $X \times Y$ waarvoor de projecties $p : X \times Y \to X$ en $q : X \times Y \to Y$ beide continu zijn.

Opgave 6.3. Zij $X \times Y$ een product met projecties $p : X \times Y \to X$ en $q : X \times Y \to Y$. Bewijs dat p en q open afbeeldingen zijn. Zijn p en q ook altijd gesloten?

Opgave 6.4. Laat X, Y topologische ruimten zijn, $y \in Y$ en $p : X \times Y \to X$ de projectie op X. Laat zien dat $p|_{X \times \{y\}} : X \times \{y\} \to X$ een homeomorfisme is.

Opgave 6.5. Zij X een topologische ruimte.
(i) Bewijs: X is Hausdorffs $\Leftrightarrow$ de diagonaal $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ is gesloten in $X \times X$.
(ii) Laat X, Y topologische ruimten zijn met X Hausdorffs. Laat $f, g : Y \to X$ twee continue afbeeldingen zijn en veronderstel dat $f = g$ op een deelverzameling $A \subset Y$ die dicht ligt in Y. Bewijs dat $f = g$ op heel Y.

Opgave 6.6. De diagonaal in $\mathbb{R}^2$ is gesloten voor de Zariski-topologie. Tegelijk weten we dat de Zariski-topologie op $\mathbb{R}$ niet Hausdorffs is. Hoe valt dit te rijmen met Opgave 6.5 (i)?

Opgave 6.7. *(Topologische groepen)* Een topologische ruimte G die tevens een groep is heet *topologische groep* als de afbeeldingen $m : G \times G \to G$ gegeven door $(x, y) \mapsto x \cdot y$ en $i : G \to G$ gegeven door $x \mapsto x^{-1}$ continu zijn.
(i) Laat zien dat een groep G voorzien van de discrete topologie een topologische groep is.
(ii) Geef voorbeelden van 'natuurlijke' topologische groepen.
Zij G een topologische groep.
(iii) Zij $g \in G$. Bewijs dat de afbeelding $G \to G$ gegeven door $x \mapsto x \cdot g$ een homeomorfisme is.
Laat $H \subset G$ een ondergroep zijn.
(iv) Bewijs: als H open is dan is H ook gesloten.
(v) Stel dat G compact is. Bewijs: H is open $\Leftrightarrow$ H is gesloten en heeft eindige index in G.
(vi) Bewijs dat H met de geïnduceerde topologie een topologische groep is.

Opgave 6.8. Bewijs:
(i) Een niet-triviale, discrete ondergroep van $\mathbb{R}$ is oneindig cyclisch.
(ii) Een niet-triviale, discrete ondergroep van S^1 is eindig en cyclisch.
(iii) Zij $\mathrm{Aut}(\mathbb{R})$ de groep van automorfismen van $\mathbb{R}$ als topologische groep, dat wil zeggen de groep van groepsisomorfismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die tegelijk homeomorfismen zijn. Dan $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Opgave 6.9. Zijn X, Y topologische ruimten. Bewijs: als X en Y lokaal samenhangend zijn, dan is $X \times Y$ dat ook. Bewijs verder: als X, Y lokaal compact zijn, dan is $X \times Y$ dat ook. En: als X, Y wegsamenhangend zijn, dan is $X \times Y$ dat ook.

Opgave 6.10. *(Universele eigenschap)* Zijn X, Y topologische ruimten en $Z = X \times Y$ het product met projecties $p : Z \to X$ en $q : Z \to Y$. Bewijs dat Z aan de volgende eigenschap voldoet: zij Z' een topologische ruimte met continue afbeeldingen $f : Z' \to X$ en $g : Z' \to Y$. Dan is er een unieke continue afbeelding $h : Z' \to Z$ zo dat het diagram

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & Z \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & Y \end{tikzcd}$$

commutatief is. Bewijs dat een topologische ruimte Z, voorzien van continue afbeeldingen $p : Z \to X$ en $q : Z \to Y$ en die aan bovenstaande eigenschap voldoet, uniek is op een uniek homeomorfisme na.

7 Quotiënten

Opgave 7.1. Zij X een topologische ruimte en $\sim$ een equivalentierelatie op X. Bewijs dat de quotiënttopologie op $X/\sim$ de fijnste topologie is waarvoor de natuurlijke projectie $p : X \to X/\sim$ continu is.

Opgave 7.2. Knip een Möbiusband langs het midden door, en dan nog eens, hoeveel stukken heb je dan?

Opgave 7.3. Zij $I = [0, 1]$ en beschouw op $I \times I$ de equivalentierelatie $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ of $(x, y) = \{(0, t), (1, t)\}$ of $(x, y) = \{(t, 0), (t, 1)\}$. Bewijs dat $I \times I/\sim$ homeomorf is met een torus. Hint: gebruik Opgave 4.4.

Opgave 7.4. Laat zien dat de quotiëntruimte $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ de triviale topologie heeft.

Opgave 7.5. Bewijs dat de projectieve ruimten $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ compact zijn.

Opgave 7.6. *(Plakken)* Laat X, Y topologische ruimten zijn, laat A een deelverzameling van X en $i : A \to Y$ een (willekeurige) afbeelding. Beschouw op $X \sqcup Y$ de relatie $\sim$ gegeven door $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ of $x \in A$ en $y = i(x)$ of $y \in A$ en $x = i(y)$ of $x, y \in A$ en $i(x) = i(y)$.
(i) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
We noemen $Z = (X \sqcup Y)/\sim$ de ruimte verkregen door X en Y *langs A aan elkaar te plakken.*
(ii) Maak een plaatje voor het geval $X = \mathbb{R}, Y = S^1, A = \{0\}$ en $i(0) = 1$.
Neem nu het geval $X = Y = \mathbb{R}, A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $i(x) = x$. We noemen Z in dit geval de *rechte met dubbele oorsprong.*
(iii) Bewijs dat de rechte met dubbele oorsprong overdekt wordt door Hausdorffse ruimten, maar zelf niet Hausdorffs is. Hint: gebruik Opgave 6.5 (ii).

Opgave 7.7. *(Samentrekken tot een punt)* Laat X een topologische ruimte zijn en A een deelverzameling van X. Beschouw op X de relatie $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ of $x, y \in A$.
(i) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
We noemen $X/\sim$ de ruimte verkregen door A *samen te trekken* tot een punt.
(i) Beschrijf een begrensde cilinder met beide randcirkels samengetrokken tot een punt.
(ii) Beschrijf de bol S^2 met een evenaar samengetrokken tot een punt.

Opgave 7.8. *(Universele eigenschap)* Laat X een topologische ruimte zijn en $\sim$ een equivalentierelatie op X. Bewijs dat het quotiënt $Z = X/\sim$ aan de volgende eigenschap voldoet: zij $f : X \to Y$ een continue afbeelding met $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$. Dan is er een unieke continue afbeelding $\overline{f} : Z \to Y$ zo dat het diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[r, "\overline{f}"] & Y \end{tikzcd}$$

commutatief is. Bewijs dat een topologische ruimte Z, die aan de bovenstaande eigenschap voldoet, uniek is op een uniek homeomorfisme na.

Opgave 7.9. Laat $D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ de n-dimensionale massieve bol in $\mathbb{R}^n$ zijn. Laat $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\} = \partial D^{n+1}$ de n-dimensionale sfeer in $\mathbb{R}^{n+1}$ zijn.
(i) Construeer een surjectieve continue afbeelding $f : D^n \to S^n$ die de rand $\partial D^n = S^{n-1}$ samentrekt tot één punt en injectief is op het inwendige van D^n.
We schrijven D^n/S^{n-1} voor de quotiëntruimte van D^n gedefinieerd door de equivalentierelatie $x \sim y :\Leftrightarrow x = y$ of $x, y \in \partial D^n = S^{n-1}$. Laat $p : D^n \to D^n/S^{n-1}$ de natuurlijke projectie zijn.
(ii) Bewijs dat f te schrijven is als $f = \overline{f} \circ p$ met $\overline{f} : D^n/S^{n-1} \to S^n$ een bijectieve, continue afbeelding (gebruik de universele eigenschap van het quotiënt).
(iii) Concludeer dat D^n/S^{n-1} homeomorf is met S^n (gebruik Opgave 4.4).
(iv) Bewijs dat S^n de éénpuntscompactificatie is van $\mathbb{R}^n$ (hint: het inwendige van D^n is homeomorf met $\mathbb{R}^n$).

8 Puntrijen en convergentie

Opgave 8.1. Beschouw de verzameling $X = \{0, 1, 2\}$ met de topologie $\mathcal{U} = \{\varnothing, \{0\}, X\}$ op X. Bewijs dat 1 en 2 limietpunten zijn van de rij $(0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \ldots)$.

Opgave 8.2. Bewijs dat een puntrij in een Hausdorffse ruimte hoogstens één limietpunt heeft.

Opgave 8.3. Geef een voorbeeld van een deelruimte A van een metrische ruimte X die wel gesloten en begrensd, maar niet compact is.

Opgave 8.4. Bewijs dat $C([0, 1])$ volledig is ten aanzien van de sup-norm.

Opgave 8.5. *(Separabele ruimten)* Zij X een topologische ruimte. We zeggen dat X *separabel* is als X een aftelbare dichte deelverzameling bevat.
(i) Geef voorbeelden van separabele ruimten.
We tonen nu aan dat een deelruimte van een separabele ruimte niet separabel hoeft te zijn. We beschouwen $X = \mathbb{R}^2$ en de collectie $\{U_{a,b}\}$ met $U_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq a, y \geq b\}$ en $a, b \in \mathbb{R}$.
(ii) Bewijs dat $\{U_{a,b}\}$, tezamen met $\varnothing$, de basis vormt van een topologie op $\mathbb{R}^2$.
(iii) Bewijs dat in deze topologie de (aftelbare) verzameling $A = \{(n, n) : n \in \mathbb{Z}\}$ dicht ligt.
(iv) Bewijs dat de geïnduceerde topologie op $\{x + y = 0\}$ discreet is en dus geen aftelbare dichte deelverzameling bevat.

Opgave 8.6. *(Eerste aftelbaarheidsaxioma)* Zij X een topologische ruimte. We zeggen dat X aan het *eerste aftelbaarheidsaxioma* voldoet als ieder punt in X een aftelbare omgevingsbasis heeft, dat wil zeggen, voor ieder punt $x \in X$ is er een aftelbare collectie $\{U_\alpha\}$ van open omgevingen van x zodat iedere open omgeving U van x minstens één U_α omvat.
(i) Bewijs dat een metrische ruimte aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet.
(ii) Bewijs dat een deelruimte van een ruimte die aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet, ook aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet.
(iii) Zijn X, Y topologische ruimten waarbij X aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet. Laat $f : X \to Y$ een afbeelding zijn. Bewijs: f is continu $\Leftrightarrow$ f is rijcontinu.
(iv) Laat X een ruimte zijn die aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet. Bewijs: als X compact is, dan is X rijcompact.

Opgave 8.7. *(Tweede aftelbaarheidsaxioma)* Zij X een topologische ruimte. We zeggen dat X aan het *tweede aftelbaarheidsaxioma* voldoet als X een aftelbare basis heeft.
(i) Bewijs dat een ruimte die aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet, ook aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet, en bovendien separabel is.
(ii) Bewijs dat een deelruimte van een ruimte die aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet, ook aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet.
(iii) Laat X een ruimte zijn die aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet. Bewijs: X is compact $\Leftrightarrow$ X is rijcompact.
(iv) Laat $X = C([0,1])$ de ruimte van continue functies op $[0,1]$ zijn met de sup-norm. Bewijs dat X niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet.

9 De fundamentaalgroep

Opgave 9.1. *(Herparametrisatie)* Zij X een topologische ruimte en γ een weg in X. Zij $g : [0,1] \to [0,1]$ een continue afbeelding met $g(0) = 0$ en $g(1) = 1$. Bewijs dat γ en $\gamma \circ g$ homotoop zijn.

Opgave 9.2. Bepaal de fundamentaalgroep van de achtfiguur.

Opgave 9.3. Zijn X, Y wegsamenhangende ruimten. Kies basispunten $x \in X$ en $y \in Y$. Bewijs dat er een natuurlijk isomorfisme $\pi_1(X \times Y, (x,y)) \cong \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$ bestaat.

Opgave 9.4. *(Retract)* Zij X een wegsamenhangende ruimte, Y een wegsamenhangende deelruimte van X en $y \in Y$ een punt. Laat $i : Y \to X$ de inclusie zijn.
(i) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de geïnduceerde afbeelding $i_* : \pi_1(Y,y) \to \pi_1(X,y)$ niet injectief hoeft te zijn.
We noemen Y een *retract* van X als er een continue afbeelding $r : X \to Y$ is met $r \circ i = \mathrm{id}_Y$. We noemen een dergelijke r ook wel een *retractie*.
(ii) Bewijs: als Y een retract is van X, dan is i_* injectief.
(iii) Bewijs: de door een retractie $r : X \to Y$ geïnduceerde afbeelding $r_* : \pi_1(X,y) \to \pi_1(Y,y)$ is surjectief.

Opgave 9.5. Beschrijf $f_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, f(1))$ voor de volgende continue afbeeldingen:
(i) $f(e^{i\theta}) = -e^{i\theta}$;

(ii) $f(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ met $n \in \mathbb{Z}$;
(iii) $f(e^{i\theta}) = \begin{cases} e^{i\theta} & 0 \leq \theta \leq \pi \\ e^{i(2\pi-\theta)} & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$.

Opgave 9.6. *(Deformatieretract)* Zij X een wegsamenhangende ruimte en Y een deelruimte van X. We noemen Y een *deformatieretract* van X als er een continue afbeelding $F : X \times [0,1] \to X$ bestaat met $F(x,0) = x$ en $F(x,1) \in Y$ voor alle $x \in X$ en bovendien $F(y,t) = y$ voor alle $y \in Y$ en $t \in [0,1]$.
(i) Stel dat Y een deformatieretract is van X en zet $y \in Y$. Bewijs: er is een natuurlijk isomorfisme $\pi_1(X,y) \cong \pi_1(Y,y)$.
Is een punt $x \in X$ deformatieretract van X, dan heet X *samentrekbaar*.
(ii) Geef voorbeelden van samentrekbare ruimten.
(iii) Bewijs dat een samentrekbare ruimte enkelvoudig samenhangend is.

Opgave 9.7. Zij $n \geq 2$ een geheel getal. Bepaal de fundamentaalgroep van $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Opgave 9.8. Bewijs: $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow n = 2$.

Opgave 9.9. Bepaal de fundamentaalgroep van $\mathbb{R}^3$ minus de z-as.

Opgave 9.10. Zij T een torus en X een achtfiguur. Laat zien dat X homeomorf is met een deformatieretract van $T \setminus \{x\}$, waarbij $x \in T$ een punt is. Wat is dus de fundamentaalgroep van $T \setminus \{x\}$?

Opgave 9.11. Bewijs dat een continu raakvectorveld aan S^2 minstens een nulpunt heeft.

Opgave 9.12. Construeer een nergens verdwijnend raakvectorveld aan de torus.

Opgave 9.13. *(Homotopie van afbeeldingen)* Laat X, Y wegsamenhangende ruimten zijn en $f, g : X \to Y$ continue afbeeldingen. We noemen f en g *homotoop*, notatie $f \sim g$, als er een continue afbeelding $F : X \times [0,1] \to Y$ is met $F(x,0) = f(x)$ en $F(x,1) = g(x)$ voor alle $x \in X$.
(i) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is op de verzameling van continue afbeeldingen $X \to Y$.
(ii) Laat $x \in X$ en veronderstel dat $f \sim g$ via een homotopie F. Bewijs dat $g_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,g(x))$ gelijk is aan de samenstelling $\gamma_* \circ f_*$ waarbij $f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,f(x))$ de gewoonlijke afbeelding is en waarbij $\gamma_* : \pi_1(Y,f(x)) \to \pi_1(Y,g(x))$ het isomorfisme is geïnduceerd door de weg $\gamma(t) = F(x,t)$ lopend van $f(x)$ naar $g(x)$.
We noemen een continue afbeelding $f : X \to Y$ een *homotopie-equivalentie* als er een continue afbeelding $g : Y \to X$ is met $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ en $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$. We noemen X en Y *homotopie-equivalent* als er een homotopie-equivalentie tussen X en Y bestaat.
(iii) Bewijs dat X homotopie-equivalent is met een deformatieretract van X.
(iv) Bewijs dat homotopie-equivalente wegsamenhangende ruimten isomorfe fundamentaalgroepen hebben.

10 Overdekkingsruimten

Opgave 10.1. Geef voorbeelden van overdekkingsruimten $p : Y \to X$. Bepaal voor elk van deze voorbeelden de groep van dektransformaties $\mathrm{Aut}(Y/X)$. Bepaal voor de voorbeelden met

Y enkelvoudig samenhangend, na keuze van basispunten $y \mapsto x$, het kanonieke isomorfisme $\pi_1(X,x) \cong \mathrm{Aut}(Y/X)$.

Opgave 10.2. Laat $p : Y \to X$ een overdekkingsruimte zijn met Y compact. Bewijs dat voor elke $x \in X$ de vezel $f^{-1}(x)$ eindig is.

Opgave 10.3. Bewijs dat een overdekkingsruimte een open afbeelding is.

Opgave 10.4. Bepaal de fundamentaalgroep van de Möbiusband.

Opgave 10.5. Bepaal de fundamentaalgroep van S^2 met de noord- en zuidpool geïdentificeerd.

Opgave 10.6. Bewijs dat een weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ die een lijn in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ precies één maal doorloopt niet samentrekbaar is tot een punt, en dus een voortbrenger van $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$ levert.

Opgave 10.7. Laat $p : Y \to X$ een overdekkingsruimte zijn met X, Y wegsamenhangend en lokaal wegsamenhangend. Zijn y, y' punten in Y met $p(y) = p(y') = x$. Bewijs dat $G(Y,y)$ en $G(Y,y')$ geconjugeerd zijn in $\pi_1(X,x)$.

Opgave 10.8. Laat $p : Y \to X$ een overdekkingsruimte zijn met X, Y wegsamenhangend en lokaal wegsamenhangend. Bewijs: $G(Y,y)$ is een normaaldeler van $\pi_1(X,p(y))$ voor een $y \in Y \Leftrightarrow G(Y,y)$ is een normaaldeler van $\pi_1(X,p(y))$ voor alle $y \in Y \Leftrightarrow$ de groep van dektransformaties $\mathrm{Aut}(Y/X)$ werkt transitief op de vezels van p.

Opgave 10.9. Laat $p : (Y,y) \to (X,x)$ een overdekkingsruimte zijn met X, Y wegsamenhangend en lokaal wegsamenhangend. Laat $G = G(Y,y) \subset \pi_1(X,x)$ de karakteristieke ondergroep zijn van (Y,y) en laat N_G de normalisator zijn van G in $\pi_1(X,x)$. Bewijs dat er een kanoniek isomorfisme $N_G/G \cong \mathrm{Aut}(Y/X)$ is.