Leidraad bij het college Topologie

1 Metrische ruimten

Zij X een verzameling.

Definitie 1.1. Een *metriek* op X is een afbeelding $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die voldoet aan de volgende eigenschappen:
(**M1**) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(**M2**) $d(x, y) = d(y, x)$ voor alle $x, y \in X$;
(**M3**) *(Driehoeksongelijkheid)* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ voor alle $x, y, z \in X$.
Een paar (X, d) met d een metriek op X heet een *metrische ruimte*.

Laat (X, d) een metrische ruimte zijn.

Definitie 1.2. Zij $\delta \in \mathbb{R}$ en $x \in X$. De *open bol met straal* δ *om* x is de verzameling $B(x, \delta) = \{y \in X \, : \, d(x, y) < \delta\}$. We noemen $U \subset X$ een *open verzameling* van X als voor iedere $x \in U$ er een $\delta > 0$ is zodat $B(x, \delta) \subset U$. Het complement van een open verzameling heet een *gesloten verzameling* in X.

Propositie 1.3. *De open verzamelingen in X hebben de volgende eigenschappen:*
(O1) *$\varnothing$ en X zijn open verzamelingen;*
(O2) *een vereniging van open verzamelingen is een open verzameling;*
(O3) *de doorsnede van eindig veel open verzamelingen is een open verzameling.*

2 Topologische ruimten

Zij X een verzameling en $\mathcal{U}$ een collectie deelverzamelingen van X.

Definitie 2.1. We noemen $\mathcal{U}$ een *topologie* op X als
(**O1**) $\varnothing, X \in \mathcal{U}$;
(**O2**) voor elke deelcollectie $\{U_\alpha\}$ van $\mathcal{U}$ geldt $\cup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{U}$;
(**O3**) voor elke eindige deelcollectie $\{U_\alpha\}$ van $\mathcal{U}$ geldt $\cap_\alpha U_\alpha \in \mathcal{U}$.
De elementen van $\mathcal{U}$ noemen we *open verzamelingen*. Zij $x \in X$; een open verzameling U met $x \in U$ heet een *open omgeving* van x. Een *gesloten verzameling* is het complement van een open verzameling. Een paar $(X, \mathcal{U})$ met $\mathcal{U}$ een topologie op X heet een *topologische ruimte*.

Definitie 2.2. De topologie die alleen uit $\varnothing$ en X bestaat heet de *triviale topologie* op X. De topologie die uit alle deelverzamelingen van X bestaat heet de *discrete topologie* op X.

Definitie 2.3. Laat $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}'$ twee topologieën zijn op X. We noemen $\mathcal{U}$ *grover dan* $\mathcal{U}'$, en omgekeerd $\mathcal{U}'$ *fijner dan* $\mathcal{U}$, als $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$.

Definitie 2.4. Een topologische ruimte X heet *Hausdorffs* als voor iedere $x, y \in X$ met $x \neq y$ er open omgevingen U van x en V van y zijn met $U \cap V = \varnothing$.

Propositie 2.5. *Een metrische ruimte is Hausdorffs.*

Zij X een topologische ruimte en A een deelverzameling van X.

Definitie 2.6. Het *inwendige* van A, notatie A°, is de vereniging van alle open verzamelingen die in A bevat zijn. De *afsluiting* van A, notatie $\overline{A}$, is de doorsnede van alle gesloten verzamelingen die A omvatten. We noemen $\overline{A} \setminus A^\circ$ de *rand* van A, notatie ∂A. We zeggen dat A *dicht ligt* in X als $\overline{A} = X$. Ten slotte noemen we $x \in X$ een *verdichtingspunt* van A als iedere open omgeving van x een punt van A bevat dat ongelijk is aan x.

Propositie 2.7. *Er geldt: A is gesloten $\Leftrightarrow$ A bevat al zijn verdichtingspunten. Verder geldt: $\overline{A}$ is gelijk aan de vereniging van A en de verzameling verdichtingspunten van A.*

Definitie 2.8. We verkrijgen een topologie op A door als open verzamelingen te nemen de verzamelingen $U \cap A$, met U open in X (ga na). We noemen deze topologie de *geïnduceerde topologie* op A. We noemen A tezamen met de geïnduceerde topologie ook wel een *deelruimte* van X.

Definitie 2.9. Een collectie $\mathcal{U}$ van open verzamelingen van X heet een *basis* van X als iedere open verzameling te schrijven is als vereniging van elementen uit $\mathcal{U}$. We noemen een collectie open verzamelingen $\mathcal{U}$ van X een *subbasis* van X als de topologie op X *wordt voortgebracht* door $\mathcal{U}$, dat wil zeggen, de topologie op X is de grofste topologie die $\mathcal{U}$ omvat.

3 Continue afbeeldingen

Definitie 3.1. Laat X, Y topologische ruimten zijn en $f : X \to Y$ een afbeelding. We noemen f *continu* als voor elke open verzameling U van Y het inverse beeld $f^{-1}(U)$ open is in X.

Propositie 3.2. *Laat X, Y topologische ruimten zijn en $f : X \to Y$ een afbeelding. De volgende uitspraken zijn equivalent:*
(i) f is continu;
(ii) voor elke gesloten verzameling G van Y is het inverse beeld $f^{-1}(G)$ gesloten in X;
(iii) voor elke $x \in X$ geldt: zij U een open omgeving van $f(x)$. Dan is er een open omgeving V van x zodat $f(V) \subset U$.

Propositie 3.3. (Topologische ruimten vormen een categorie) *Laat $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ continue afbeeldingen zijn. Dan is $g \circ f : X \to Z$ continu. Verder is de identiteit een continue afbeelding.*

Definitie 3.4. Een bijectieve continue afbeelding $f : X \to Y$ waarvoor $f^{-1} : Y \to X$ ook continu is heet een *homeomorfisme*.

Definitie 3.5. Een continue afbeelding $f : X \to Y$ heet *open* als f open verzamelingen op open verzamelingen afbeeldt. Een continue afbeelding $f : X \to Y$ heet *gesloten* als f gesloten verzamelingen op gesloten verzamelingen afbeeldt.

4 Compactheid

Definitie 4.1. Zij $\{U_\alpha\}$ een collectie open verzamelingen van een topologische ruimte X. We noemen $\{U_\alpha\}$ een *open overdekking* van X als $X = \cup_\alpha U_\alpha$.

Definitie 4.2. Een topologische ruimte heet *compact* als iedere open overdekking van X een eindige deeloverdekking heeft.

Propositie 4.3. (Bolzano-Weierstrass-eigenschap) *Een oneindige deelverzameling van een compacte ruimte X heeft een verdichtingspunt in X.*

Propositie 4.4. *Zij X een compacte topologische ruimte en A gesloten in X. Dan is A compact.*

Propositie 4.5. *Zij X een Hausdorffse ruimte en A een compacte deelruimte van X. Dan is A gesloten in X.*

Propositie 4.6. *Zij X een metrische ruimte en A een compacte deelruimte van X. Dan is A gesloten en begrensd.*

Propositie 4.7. *Het beeld, onder een continue afbeelding, van een compacte ruimte is weer compact.*

Gevolg 4.8. *Zij $f : X \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding op een compacte ruimte X. Dan neemt f een maximum en een minimum aan.*

5 Samenhang

Definitie 5.1. Een niet-lege topologische ruimte X heet *samenhangend* als de volgende eigenschap geldt: laat $A \subset X$ zowel open als gesloten zijn. Dan is $A = \varnothing$ of $A = X$.

Propositie 5.2. *Zij X een niet-lege topologische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*
(i) X is samenhangend;
(ii) zijn U_1, U_2 twee disjuncte open verzamelingen met $U_1 \cup U_2 = X$. Dan geldt $U_1 = X$ of $U_2 = X$;
(iii) zijn G_1, G_2 twee disjuncte gesloten verzamelingen met $G_1 \cup G_2 = X$. Dan geldt $G_1 = X$ of $G_2 = X$.

Propositie 5.3. *De samenhangende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn precies de intervallen.*

Propositie 5.4. *Zij X een topologische ruimte en $\{A_\nu\}$ een collectie samenhangende deelruimten van X met $\cap_\nu A_\nu \neq \varnothing$. Dan is $\cup_\nu A_\nu$ ook samenhangend.*

Propositie 5.5. *Zij X een topologische ruimte en A een samenhangende deelruimte van X. Dan is $\overline{A}$ ook samenhangend.*

Propositie 5.6. *Het beeld, onder een continue afbeelding, van een samenhangende ruimte is weer samenhangend.*

Definitie 5.7. Zij X een niet-lege topologische ruimte. Een continue afbeelding $\gamma : [0,1] \to X$ heet een *weg* in X. We noemen X *wegsamenhangend* als voor iedere $p, q \in X$ er een weg $\gamma : [0,1] \to X$ is met $\gamma(0) = p$ en $\gamma(1) = q$.

Propositie 5.8. *Een wegsamenhangende ruimte is samenhangend.*

6 Producten

Zijn X, Y topologische ruimten.

Definitie 6.1. We definiëren op het verzamelingstheoretisch product $X \times Y$ van X en Y de *producttopologie* als de topologie voortgebracht door de verzamelingen $U \times V$, met U open in X en V open in Y.

Propositie 6.2. *Zij $X \times Y$ een product met projecties $p : X \times Y \to X$ en $q : X \times Y \to Y$. Dan zijn p en q continu.*

Propositie 6.3. *Als X en Y Hausdorffs zijn, dan is $X \times Y$ dat ook.*

Propositie 6.4. *Als X en Y samenhangend zijn, dan is $X \times Y$ dat ook.*

Propositie 6.5. *Als X en Y compact zijn, dan is $X \times Y$ dat ook.*

Stelling 6.6. (Peano) *Er bestaat een surjectieve continue afbeelding $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$.*

7 Quotiënten

Definitie 7.1. Zij X een topologische ruimte en $\sim$ een equivalentierelatie op X. Laat $p : X \to X/\sim$ de natuurlijke projectie zijn. We verkrijgen een topologie op $X/\sim$ door te stellen: U open in $X/\sim \Leftrightarrow p^{-1}(U)$ open in X (ga na). We noemen deze topologie de *quotiënttopologie* of *identificatietopologie* op $X/\sim$.

Propositie 7.2. *Zij X een topologische ruimte en $\sim$ een equivalentierelatie op X. Dan is de natuurlijke projectie $p : X \to X/\sim$ een continue afbeelding.*

Propositie 7.3. *Zij $f : X \to Y$ een surjectieve continue afbeelding. Als f open is, dan is Y een quotiëntruimte van X. Idem als f gesloten is.*

8 Puntrijen en convergentie

Definitie 8.1. Zij X een topologische ruimte en $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ een puntrij in X. We zeggen dat $x \in X$ een *limietpunt* is van $\{x_n\}$ als voor iedere open omgeving U van x er een $N \geq 1$ is zó dat $x_n \in U$ voor alle $n \geq N$. We zeggen in dit geval dat $\{x_n\}$ *convergeert naar* x, notatie $x_n \to x$.

Definitie 8.2. Zijn X, Y topologische ruimten en $f : X \to Y$ een afbeelding. We noemen f *rijcontinu* als $x_n \to x$ impliceert dat $f(x_n) \to f(x)$.

Propositie 8.3. *Een continue afbeelding is rijcontinu.*

Propositie 8.4. *Een rijcontinue afbeelding $f : X \to Y$ tussen metrische ruimten is continu.*

Definitie 8.5. Zij (X, d) een metrische ruimte en $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ een puntrij in X. We noemen $\{x_n\}$ een *Cauchyrij* als voor iedere $\epsilon > 0$ er een $N \geq 1$ is zó dat $d(x_n, x_m) < \epsilon$ voor alle $m, n \geq N$. We noemen X *volledig* als iedere Cauchyrij in X convergeert.

Propositie 8.6. *Zij X een volledige metrische ruimte en A een deelruimte van X. De volgende uitspraken zijn equivalent:*
(i) A is volledig;
(ii) A is gesloten;
(iii) elke rij in A, die convergeert in X, heeft zijn limiet in A.

Stelling 8.7. (Banach contractiestelling) *Zij (X, d) een volledige metrische ruimte en $f : X \to X$ een contractie, d.w.z. f is continu en er is een $\theta \in [0, 1[$ zo dat $d(f(x), f(y)) \leq \theta \cdot d(x, y)$ voor alle $x, y \in X$. Dan is er precies één fixpunt van f, d.w.z. er is precies één $\overline{x} \in X$ met $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Verder geldt dat voor iedere $x \in X$ de rij gedefinieerd door $x_0 = x$ en $x_{n+1} = f(x_n)$ voor $n \geq 0$ convergent is met limiet $\overline{x}$.*

Definitie 8.8. Zij (X, d) een metrische ruimte. Laat $\mathcal{C}(X)$ de verzameling Cauchyrijtjes zijn in X. Definieer op $\mathcal{C}(X)$ een equivalentierelatie volgens $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow d(x_n, y_n) \to 0$ als $n \to \infty$ (ga na dat dit inderdaad een equivalentierelatie levert). We noemen de verzameling equivalentieklassen $\mathcal{C}(X)/\sim$ de *completering* van X, notatie $\widehat{X}$.

Propositie 8.9. *Zij X een metrische ruimte. De verzameling $\widehat{X}$ heeft op natuurlijke wijze de structuur van een volledige metrische ruimte. Er is een natuurlijke isometrie $i : X \to \widehat{X}$ zodat $i(X)$ dicht ligt in $\widehat{X}$.*

Definitie 8.10. We noemen een topologische ruimte X *rijcompact* als iedere puntrij in X een convergente deelrij heeft.

Definitie 8.11. We noemen een metrische ruimte X *totaal begrensd* of ook wel *precompact* als voor iedere $\epsilon > 0$ er eindig veel $x_1, \ldots, x_n \in X$ zijn met $X = \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$.

Stelling 8.12. *Zij X een metrische ruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*
(i) X is compact;
(ii) X is rijcompact;
(iii) X is totaal begrensd en volledig.

Stelling 8.13. (Heine-Borel) *Zij X een deelverzameling van $\mathbb{R}$. Dan geldt: X is compact $\Leftrightarrow$ X is gesloten en begrensd.*

Gevolg 8.14. *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding op een gesloten interval. Dan neemt f een maximum en een minimum aan.*

9 De fundamentaalgroep

Definitie 9.1. Zij X een topologische ruimte. Laat $x, y \in X$ en laat $\gamma, \gamma' : [0,1] \to X$ twee wegen zijn met beginpunt x en eindpunt y. Een *homotopie* van γ naar γ' is een continue afbeelding $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ met $F(0,t) = \gamma(t)$ en $F(1,t) = \gamma'(t)$ voor alle $t \in [0,1]$ en verder $F(s,0) = x$ en $F(s,1) = y$ voor alle $s \in [0,1]$. We noemen twee wegen γ, γ' met hetzelfde beginpunt x en hetzelfde eindpunt y *homotoop*, notatie $\gamma \sim \gamma'$, als er een homotopie van γ naar γ' bestaat.

Propositie 9.2. *Homotopie is een equivalentierelatie op de verzameling wegen van x naar y.*

In de rest van dit hoofdstuk is X steeds een wegsamenhangende topologische ruimte.

Definitie 9.3. Zij $x \in X$ een punt. De *fundamentaalgroep* van X met *basispunt* x, notatie $\pi_1(X, x)$, is de verzameling homotopieklassen van wegen in X met begin- en eindpunt gelijk aan x.

Definitie 9.4. Zij $x \in X$ een punt. Laat γ, γ' wegen zijn in X met begin- en eindpunt gelijk aan x. We definiëren een weg $\gamma \cdot \gamma'$ door

$$(\gamma \cdot \gamma')(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{voor} \quad t \in [0, 1/2]\,, \\ \gamma'(2t-1) & \text{voor} \quad t \in [1/2, 1]\,. \end{cases}$$

De *inverse weg* γ^{-1} van γ is gedefinieerd door

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t) \, \text{voor alle} \, t \in [0,1]\,.$$

De *constante weg* c_x is de weg met $c_x(t) = x$ voor alle $t \in [0,1]$.

Propositie 9.5. *Zij $x \in X$ een punt en laat $\gamma, \gamma', \delta, \delta', \epsilon$ wegen zijn in X met begin- en eindpunt gelijk aan x. Er geldt:*
(i) $\gamma \sim \gamma'$ en $\delta \sim \delta'$ impliceert $\gamma \cdot \delta \sim \gamma' \cdot \delta'$;
(ii) $\gamma \cdot (\delta \cdot \epsilon) \sim (\gamma \cdot \delta) \cdot \epsilon$;
(iii) $\gamma \sim \gamma \cdot c_x \sim c_x \cdot \gamma$;
(iv) $\gamma \cdot \gamma^{-1} \sim c_x$ en $\gamma^{-1} \cdot \gamma \sim c_x$.

Gevolg 9.6. *Zij $x \in X$ een punt. De bewerking $\cdot$ op de verzameling wegen met begin- en eindpunt gelijk aan x definieert een groepsstructuur op de verzameling $\pi_1(X, x)$. De klasse $[c_x]$ van de constante weg is het neutrale element van deze groep. Verder geldt dat $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$ voor elke weg γ met begin- en eindpunt gelijk aan x.*

Propositie 9.7. *Zijn x, y twee punten in X. De fundamentaalgroepen $\pi_1(X, x)$ en $\pi_1(X, y)$ zijn isomorf.*

Definitie 9.8. We noemen X *enkelvoudig samenhangend* als $\pi_1(X, x)$ triviaal is voor een (en dus elke) $x \in X$.

Stelling 9.9. *Voor de fundamentaalgroep van de cirkel geldt $\pi_1(S^1, x) \cong \mathbb{Z}$.*

Stelling 9.10. *S^n is enkelvoudig samenhangend voor $n \geq 2$.*

Definitie 9.11. Onder een *topologische ruimte met basispunt* verstaan we een paar (X, x) met X een wegsamenhangende topologische ruimte en met x een punt in X. Onder een *continue afbeelding* $f : (X, x) \to (Y, y)$ verstaan we een continue afbeelding $f : X \to Y$ met $f(x) = y$.

Propositie 9.12. *Zij $f : (X, x) \to (Y, y)$ een continue afbeelding. De toekenning $\gamma \mapsto f \circ \gamma$ levert een groepshomomorfisme $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$.*

Propositie 9.13. (Functorialiteit) *Zijn $f : (X, x) \to (Y, y)$ en $g : (Y, y) \to (Z, z)$ continue afbeeldingen. Dan geldt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ en verder geldt* $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$.

Gevolg 9.14. *Homeomorfe topologische ruimten hebben isomorfe fundamentaalgroepen.*

Stelling 9.15. (Fixpuntstelling van Brouwer) *Zij $D \subset \mathbb{R}^2$ de gesloten eenheidsschijf. Een continue afbeelding $D \to D$ heeft een fixpunt.*

10 Overdekkingsruimten

Definitie 10.1. We noemen een continue afbeelding $p : Y \to X$ een *overdekkingsruimte* als voor iedere $x \in X$ er een open omgeving U van x is zodat $p^{-1}(U)$ een disjuncte vereniging is van open verzamelingen V_y (waarbij y door $f^{-1}(x)$ loopt), die door p homeomorf op U worden afgebeeld.

Definitie 10.2. Zij $p : Y \to X$ een overdekkingsruimte, en zij γ een weg in X. Een weg $\tilde{\gamma}$ in Y heet *lift* van γ als $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$.

Propositie 10.3. (Liften van wegen) *Zij $p : Y \to X$ een overdekkingsruimte, zij $x \in X$ een punt en zij γ een weg in X met beginpunt x. Kies een punt $y \in Y$ met $p(y) = x$. Er bestaat dan precies één lift $\tilde{\gamma}$ van γ met beginpunt y.*

Propositie 10.4. (Liften van homotopieën) *Zij $p : Y \to X$ een overdekkingsruimte, zij $x \in X$ een punt en zijn γ, γ' wegen in X met beginpunt x. Kies een punt $y \in Y$ met $p(y) = x$. Laat $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ de lifts zijn van γ, γ' met beginpunt y. Als $\gamma \sim \gamma'$ dan geldt $\tilde{\gamma} \sim \tilde{\gamma}'$. In het bijzonder geldt dan dat $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$.*

In de rest van dit hoofdstuk zijn alle topologische ruimten steeds wegsamenhangend en lokaal wegsamenhangend.

Gevolg 10.5. *Veronderstel dat $p : (Y, y) \to (X, x)$ een overdekkingsruimte is. De afbeelding $p_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, x)$ is injectief.*

Definitie 10.6. Veronderstel dat $p : (Y, y) \to (X, x)$ een overdekkingsruimte is. We noemen het beeld onder p_* van $\pi_1(Y, y)$ in $\pi_1(X, x)$ de *karakteristieke ondergroep* van (Y, y) over (X, x), notatie $G(Y, y)$.

Definitie 10.7. Zijn $p : Y \to X$ en $p' : Y' \to X$ twee overdekkingsruimten. Een *afbeelding van overdekkingsruimten* is een continue afbeelding $h : Y \to Y'$ met $p = p' \circ h$.

Propositie 10.8. *Veronderstel dat* $p : (Y, y) \to (X, x)$ *en* $p' : (Y', y') \to (X, x)$ *overdekkingsruimten zijn. Er geldt: er bestaat een afbeelding van overdekkingsruimten* $f : (Y, y) \to (Y', y')$ $\Leftrightarrow G(Y, y) \subset G(Y', y')$*. In het bijzonder geldt: er is een homeomorfisme van overdekkingsruimten* $(Y, y) \cong (Y', y') \Leftrightarrow G(Y, y) = G(Y', y')$*.*

Definitie 10.9. Een overdekkingsruimte $q : \tilde{X} \to X$ waarbij $\tilde{X}$ enkelvoudig samenhangend is, heet *universele overdekkingsruimte.*

Gevolg 10.10. *Veronderstel dat* $q : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ *een universele overdekkingsruimte is. Voor elke overdekkingsruimte* $p : (Y, y) \to (X, x)$ *is er een afbeelding van overdekkingsruimten* $f : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (Y, y)$*.*

Definitie 10.11. Zij $p : Y \to X$ een overdekkingsruimte. Een homeomorfisme van overdekkingsruimten $f : Y \xrightarrow{\sim} Y$ heet een *dektransformatie* van Y over X. De verzameling dektransformaties van Y over X vormt op natuurlijke wijze een groep (ga na), notatie $\mathrm{Aut}(Y/X)$.

Stelling 10.12. *Zij* $q : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ *een universele overdekkingsruimte. Er bestaat een kanoniek isomorfisme* $\pi_1(X, x) \cong \mathrm{Aut}(\tilde{X}/X)$*. Verder is de cardinaliteit van* $\pi_1(X, x)$ *gelijk aan de cardinaliteit van de vezel* $q^{-1}(x)$*.*