Hertentamen Algebra 1, 13 juli 2018

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt!

Je mag het dictaat gebruiken, maar het gebruik van aantekeningen en een rekenmachine is niet toegestaan. Je mag niet naar opgaven uit het dictaat verwijzen, behalve naar opgaven 2.46, 2.49, 4.58, 5.27, 5.30, 8.4, 8.13.

Opgave 1 (2+1+1+3=7 punten)
Definieer de permutatie $\sigma \in S_8$ door $\sigma = (1\ 8\ 2\ 3\ 4\ 6)(1\ 3\ 7\ 5)$.
a) Schrijf σ als product van disjuncte cykels.
b) Wat is de orde van σ?
c) Wat is het teken van σ?
d) Geef de disjuncte cykelnotatie van $\sigma^{\left(17^{2018}\right)}$.

Opgave 2 (3+2+2+3=10 punten) Merk op dat $399 = 3 \times 7 \times 19$.
a) Bestaat er een $a \in \mathbb{Z}$ met $37a \equiv 1 \pmod{399}$? Zo ja, bepaal zo'n a.
b) Wat is de orde van $(\mathbb{Z}/399\mathbb{Z})^*$?
c) Laat zien dat voor elke $x \in (\mathbb{Z}/399\mathbb{Z})^*$ geldt $x^{18} = \overline{1}$.
d) Bepaal de orde van $\overline{5}$ in $(\mathbb{Z}/399\mathbb{Z})^*$.

Opgave 3 (3+2+3+2=10 punten)
Zij p een oneven priemgetal en definieer $d = (p-1)/2$.
Zij G het beeld van het homomorfisme $\varphi\colon (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ gegeven door $\varphi(x) = x^2$.
Zij H het beeld van het homomorfisme $\chi\colon (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ gegeven door $\chi(x) = x^d$.
a) Laat zien dat G precies d elementen heeft.
b) Laat zien dat de elementen van G precies de nulpunten van het polynoom $X^d - \overline{1}$ zijn.
c) Laat zien dat er geldt $H = \{\overline{1}, -\overline{1}\}$.
d) Laat zien dat er een isomorfisme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*/G \xrightarrow{\sim} H$ bestaat.

Opgave 4 (5+4=9 punten)
a) Bepaal het aantal homomorfismen van D_{34} naar de (multiplicatieve) groep $\mathbb{C}^*$.
b) Bepaal het aantal homomorfismen van de (additieve) groep $\mathbb{Q}$ naar de (additieve) groep $\mathbb{Z}$.

Opgave 5 (2+3+4=9 punten)
Zij G een groep en $T \subset G$ een deelverzameling (dus niet per se een ondergroep).
Voor elke $a \in G$ definiëren we

$$aTa^{-1} = \{\, ata^{-1} \ :\ t \in T \,\}.$$

Definieer nu

$$F(T) = \left\{\, a \in G \ :\ aTa^{-1} = T \,\right\}.$$

a) Laat zien dat $F(T)$ een ondergroep is van G.
b) Laat zien dat er geldt $\#\{\, aTa^{-1} \ :\ a \in G \,\} = [G : F(T)]$.
c) Geef een voorbeeld van een groep G en een deelverzameling $T \subset G$ waarvoor de bijbehorende ondergroep $F(T)$ niet normaal is in G.

Het tentamen zal begin augustus worden nagekeken en kan op 6 augustus om 10:00 ingekeken worden in kamer 250 van het Snellius gebouw.