Tentamen Algebra 1, 20 juni 2019

Je mag het dictaat gebruiken, maar het gebruik van aantekeningen en een rekenmachine is niet toegestaan. Je mag niet naar opgaven uit het dictaat verwijzen, behalve naar opgaven 2.46, 2.49, 4.58, 5.27, 5.30, 8.4, 8.13.

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt!

Opgave 1
Definieer de permutatie $\sigma \in S_{11}$ door $\sigma = (1\ 5\ 8\ 7\ 3)(2\ 4\ 7\ 3\ 6)(1\ 6\ 7\ 4\ 9\ 3)$.
a) Schrijf σ als product van disjuncte cykels.
b) Wat is de orde van σ?
c) Wat is de inverse van σ?
d) We bekijken de werking van $\mathbb{Z}$ op $X = \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ gegeven door

$$\mathbb{Z} \to S(X), \quad k \mapsto \sigma^k.$$

Wat is het aantal banen van deze werking?

Opgave 2
a) Laat zien dat 2 een primitieve wortel is modulo 19.
b) Hoeveel primitieve wortels zijn er modulo 19?
c) Laat zien dat de multiplicatieve groep $(\mathbb{Z}/38\mathbb{Z})^*$ cyclisch is en geef een voortbrenger.

Opgave 3
a) Bestaat er een $x \in \mathbb{Z}$ met $18x \equiv 1 \pmod{2019}$? Zo ja, bepaal zo'n x.
b) Bestaat er een $x \in \mathbb{Z}$ met $19x \equiv 1 \pmod{2019}$? Zo ja, bepaal zo'n x.

Opgave 4
Zij K de symmetriegroep van een kubus en X de verzameling van de vier lichaamsdiagonalen van de kubus. Zij $\phi\colon K \to S(X)$ de natuurlijke werking.
a) Wat is de kern van ϕ?
We hebben in het dictaat en op het college gezien dat er een determinantafbeelding

$$\det\colon K \to \{\pm 1\}$$

is waarvan de kern de ondergroep $K^+ \subset K$ van draaiingen is. Zij verder

$$\varepsilon\colon S(X) \to \{\pm 1\}$$

de gebruikelijke tekenafbeelding. Zij tenslotte $G = \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ de groep van de vier paren $(\pm 1, \pm 1)$ met coördinaatsgewijze vermenigvuldiging.
b) Laat zien dat het homomorfisme $K \to G$ dat een symmetrie f stuurt naar $\big(\det f, \varepsilon(\phi(f))\big)$ een kern van orde 12 heeft.
c) Laat zien dat de abels gemaakte K_{ab} isomorf is met G.
d) Hoeveel homomorfismen zijn er van K naar G?

Opgave 5
Zij n een even geheel getal en zij $g \in S_n$ een $(n-1)$-cykel.
a) Bewijs dat de normalisator N_g van g in S_n orde $n-1$ heeft.
b) Laat zien dat deze normalisator N_g bevat is in A_n.
c) Laat zien dat de conjugatieklasse van g in S_n de vereniging is van twee even grote conjugatieklassen in A_n.