Kwadratische vormen

Zij K een lichaam en n een niet-negatief geheel getal. Een *kwadratische vorm* van dimensie n over K is een homogeen polynoom

$$f = a_{1,1}x_1^2 + a_{1,2}x_1x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n^2 = \sum_{i\leq j} a_{i,j}x_ix_j$$

van graad 2 in de n variabelen $x_1, \ldots, x_n$. Door voor $(x_1, \ldots, x_n)$ elementen van K^n te substitueren, krijgen we uit een kwadratische vorm een *kwadratische afbeelding*, d.w.z. een functie

$$q\colon K^n \to K$$

met de volgende eigenschappen:

(1) voor alle $a \in K$ en $x \in K^n$ geldt $f(ax) = a^2 f(x)$;

(2) de afbeelding $b\colon K^n \times K^n \to K$ gedefinieerd door $b(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ is bilineair.

Omgekeerd definieert elke kwadratische afbeelding een kwadratische vorm.

Twee kwadratische vormen q en q' heten *equivalent* (notatie $q \sim q'$) als ze gelijk zijn op een lineaire verandering van variabelen na, d.w.z. als er een inverteerbare $n \times n$-matrix M over K bestaat waarvoor

$$q'(x) = q(Mx) \quad \text{voor alle } x \in K^n.$$

Om kwadratische vormen te klassificeren is het mogelijk om *invarianten* te definiëren. Zo is er, naast de dimensie, de *discriminant* van een kwadratische vorm. Voor bepaalde lichamen zijn er meer invarianten.

Verder is het interessant om te onderzoeken van wat voor structuur de verzameling van alle kwadratische vormen op equivalentie na voorzien kan worden. Dit leidt tot de *Wittring* van het lichaam K (E. Witt, 1937), waarin het mogelijk is kwadratische vormen over K “op te tellen” en te “vermenigvuldigen”.

Het bestuderen van kwadratische vormen over een lichaam K van karakteristiek 2 blijkt lastiger te zijn dan voor andere karakteristieken. Een voorbeeld hiervan: als de karakteristiek van K niet 2 is, kan q uit b teruggevonden worden door $q(x) = \frac{1}{2}b(x, x)$, maar deze formule heeft geen betekenis als K karakteristiek 2 heeft.

Het lichaam K kan vervangen worden door een willekeurige commutatieve ring R. Voor $R = \mathbf{Z}$ en $q\colon \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}$ zodanig dat $q(x) > 0$ voor alle x leidt dit tot de theorie van *gehele roosters*, een fascinerend gebied dat verbanden heeft met de (analytische) getaltheorie en de cryptografie.

Dit gebied leent zich voor allerlei onderwerpen voor een bachelorproject. Een aantal suggesties:

- de Wittring van een lichaam;
- de Cliffordalgebra van een kwadratische vorm;
- de stelling van Pfister (1965): het kleinste gehele getal m zodanig dat $-1 \in K$ als een som van m kwadraten geschreven kan worden (vooropgesteld dat dat inderdaad kan) is een macht van 2;
- kwadratische vormen over lichamen van karakteristiek 2;
- kwadratische vormen over $\mathbf{Z}$ (gehele roosters);
- kwadratische vormen over algemene commutatieve ringen.

Begeleider: Peter Bruin ⟨pbruin@math.leidenuniv.nl⟩