

## Chevalley-Warning-Ax (begeleider: R.S. de Jong)

Zij  $\mathbb{F}_q$  een eindig lichaam met  $q$  elementen en van karakteristiek  $p$ . Zij  $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$  een polynoom van graad  $d$ . De bekende stelling van Chevalley-Warning (1936) zegt dat als  $d < n$ , het aantal nulpunten  $N(F)$  van  $F$  in  $\mathbb{F}_q^n$  deelbaar is door  $p$ . Een bewijs van deze uitspraak is verrassend eenvoudig te geven na opgemerkt te hebben dat in  $\mathbb{F}_q$  de identiteit

$$N(F) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^n} (1 - F(x)^{q-1})$$

geldt.

In 1964 gaf Ax een belangrijke veralgemening van dit resultaat: in bovenstaande situatie is  $N(F)$  deelbaar door  $q$ . Sterker nog, laat  $b$  het grootste gehele getal zijn dat strikt kleiner is dan  $n/d$ . Dan is  $N(F)$  deelbaar door  $q^b$ .

Voor deze bachelorscriptie kan naar het bewijs van Ax gekeken worden. Het maakt slim gebruik van een niet-triviaal additief karakter  $\beta: \mathbb{F}_q \rightarrow \mu_p$  waarbij  $\mu_p$  de groep van  $p$ -e eenheidswortels is in een uitbreiding van  $\mathbb{Q}_p$ , het lichaam van de  $p$ -adische getallen, en  $p$ -adische grenzen op Gauss-sommen.

Een verscherping van Chevalley-Warning-Ax is in 1971 gegeven door Katz. De ambitieuze student kan naar een bewijs van dat resultaat kijken.

Ter voorbereiding zal enige theorie over (eindige uitbreidingen van)  $\mathbb{Q}_p$  bestudeerd moeten worden.

### Literatuursuggesties

J. Ax, *Zeroes of polynomials over finite fields*. Amer. Jnl. Math. 86 (1964), 255–261.

P. Stevenhagen, *Local fields*. Lecture notes 2002.

D. Wan, *An elementary proof of a theorem of Katz*. Amer. Jnl. Math. 111 (1989), 1–8.