REEËL AFGESLOTEN LICHAMEN

BEGELEIDER: LENNY TAELMAN

Een *eerste-orde zin* over een lichaam F is een logische uitdrukking waarin enkel over elementen van F gequantificeerd wordt (en niet over deelverzamelingen van F of gehele getallen bijvoorbeeld). De uitdrukkingen

$$1_F + 1_F = 0_F, \tag{1}$$

$$\forall x \in F\, \exists y \in F \colon x = y^4 \tag{2}$$

en

$$\forall x, y \in F\, \exists z \in F \colon x^2 + y^2 = z^2 \tag{3}$$

zijn eerste-orde zinnen, maar de uitdrukkingen

$$\forall x \in F\, \exists n \in \mathbf{Z}_{>1}\, \exists y \in F \colon x = y^n$$

en

$$\exists n \in \mathbf{Z}_{>1} \colon n \cdot 1_F = 0_F$$

zijn geen eerste-orde zinnen over F.

De zin (1) is waar in $\mathbf{F}_2$ maar niet in $\mathbf{R}$. De zin (2) is waar in elk algebraïsch afgesloten lichaam, maar niet in $\mathbf{R}$. De zin (3) is waar in $\mathbf{R}$.

Een *reëel afgesloten lichaam* is een lichaam waarin precies dezelfde eerste-orde zinnen waar zijn als in $\mathbf{R}$.

Een stelling van Artin geeft een algebraïsche karakterisatie van reëel gesloten lichamen: een lichaam F is reëel gesloten dan en slechts dan als F niet algebraïsch afgesloten is, maar wel een algebraïsche afsluiting van *eindige* graad heeft.

Bijvoorbeeld: $\mathbf{R}$ is niet algebraïsch afgesloten, maar het heeft een algebraïsche afsluiting, namelijk $\mathbf{C}$, van graad 2 over $\mathbf{R}$. Er geldt nog meer: als F reëel gesloten is, dan is $F(\sqrt{-1})$ algebraïsch afgesloten.

Er zijn nog vele andere karakterisaties van reëel gesloten lichamen. Een doel in dit bachelorproject zou kunnen zijn deze karakterisaties en hun bewijzen te begrijpen.

Een andere mogelijkheid die meer in de richting van de logica gaat is om het algoritme van Tarski te bestuderen wat voor elke eerste-orde zin in een reëel gesloten lichaam beslist of die waar is of niet. Met dit algoritme is in principe een hele klasse van problemen uit de Euclidische meetkunde beslisbaar. In de praktijk is het echter alleen voor heel eenvoudige problemen uitvoerbaar.