De n-dimensionale ruimte

Arjen Stolk

In het vorige college hebben jullie gezien wat $\mathbb{R}^2$ (het vlak) is. Een *vector* $v \in \mathbb{R}^2$ is een paar $v = (x, y)$ van reële getallen.

Voor vectoren $v = (a, b)$ en $w = (c, d)$ in $\mathbb{R}^2$ en een *scalar* (getal) $\lambda \in \mathbb{R}$ worden de som $v + w$ en het scalair product λv gegeven door respectievelijk $(a + c, b + d)$ en $(\lambda a, \lambda b)$.

De superscript 2 van $\mathbb{R}^2$ doet vermoeden dat dit niet een losstaand voorbeeld is, maar dat er bijvoorbeeld ook een $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ bestaan. Dit is inderdaad het geval. Laat n een positief geheel getal zijn, dan bestaat $\mathbb{R}^n$ uit de vectoren met n componenten:

$$v = (v_1, \ldots, v_n)$$

met alle $v_i \in \mathbb{R}$.

Voor vectoren in $\mathbb{R}^n$ is er ook een optelling en scalaire vermenigvuldiging. Voor $v = (v_1, \ldots, v_n)$ en $w = (w_1, \ldots, w_n)$ in $\mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ worden $v + w$ en λv gegeven door

$$(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$$

respectievelijk

$$(\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n).$$

De rekenregels die gelden voor vectoren in $\mathbb{R}^2$, commutativiteit en associativiteit van de optelling, associativiteit en distributiviteit van de scalaire vermenigvuldiging; gelden *mutatis mutandis* ook voor $\mathbb{R}^n$.

Afspraak. We schrijven 0 voor de vector $(0, \ldots, 0)$ in $\mathbb{R}^n$.

Voorbeeld 1. $(42) \in \mathbb{R}^1$, $(4, 2) \in \mathbb{R}^2$, $(7, 7, 7, 7, 7, 7) \in \mathbb{R}^6$.
$(1, 2, 3) + (4, 5, 6) = (5, 7, 9)$, $7(3, 1, 4) = (21, 7, 28)$.

Het inwendig product

Definitie 2. Voor $v = (v_1, \ldots, v_n)$ en $w = (w_1, \ldots, w_n)$ in $\mathbb{R}^n$ wordt het *inwendig product* van v en w gegeven door

$$v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n.$$

We noteren het inwendig product als $v \cdot w$ of $\langle v, w \rangle$. Soms zeggen we ook wel *inproduct* voor het inwendige product.

Voorbeeld 3. $(1, 2, 3) \cdot (4, 5, 6) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$.

Hieronder staan een aantal eigenschappen van het inwendige product. Voor $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ en $w = (w_1, \ldots, w_n)$ in $\mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt

1. $v \cdot w = w \cdot v$;
2. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$;
3. $(\lambda v) \cdot w = \lambda(v \cdot w)$;
4. $v \cdot v \geq 0$ en $v \cdot v = 0$ dan en slechts dan als $v = 0$.

Definitie 4. Twee vectoren v en w in $\mathbb{R}^n$ staan *loodrecht* op elkaar precies dan als $v \cdot w = 0$.

Norm en afstand

Definitie 5. Zij $v = (v_1, \ldots, v_n)$ in $\mathbb{R}^n$, dan wordt de *norm* van v gegeven door

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} = \sqrt{v \cdot v}.$$

Belangrijk. Omdat $v \cdot v$ nooit negatief is, bestaat de wortel altijd. We spreken af dat we altijd de *positieve* wortel gebruiken (of 0 als $v = 0$). Voor het redeneren over normen is het belangrijk te onthouden dat $\|v\|^2 = v \cdot v$.

Om in te zien waarom dit de goede definitie is gebruiken we de stelling van Pythagoras. In $\mathbb{R}^2$ is dit direct duidelijk, in $\mathbb{R}^3$ is het ook nog in te zien (doe voorbeeld).

Stelling 6. *Voor $v \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$.*

Bewijs. Omdat beide kanten niet-negatief zijn, kunnen we ook controleren dat de kwadraten van linker- en rechterkant gelijk zijn.

Volgens de rekenregels geldt

$$\|\lambda v\|^2 = (\lambda v) \cdot (\lambda v) = \lambda(v \cdot (\lambda v)) = \lambda^2(v \cdot v).$$

□

Definitie 7. Een *eenheidsvector* is een vector met norm 1.

Voorbeeld 8. $v = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ is een eenheidsvector, want

$$\|v\| = \frac{1}{3}\|(1, 2, 2)\| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 1.$$

Definitie 9. Zij $v, w \in \mathbb{R}^n$, dan wordt de *afstand* tussen v en w gegeven door $\|v - w\|$.

Voorbeeld 10. Zij $v = (1, 2, 2)$ en $w = (3, -1, 2)$, dan geldt $\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$, $\|w\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$. De afstand tussen v en w is $\|v - w\| = \|(-2, 3, 0)\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{13}$.

Stelling 11 (Pythagoras)**.** *Zij v en w in $\mathbb{R}^n$ vectoren die loodrecht op elkaar staan. Dan geldt $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.*

Bewijs. Dit is een kwestie van uitschrijven:

$$\|v+w\|^2 = (v+w)\cdot(v+w) = v\cdot v + 2(v\cdot w) + w\cdot w = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

$\square$

Lijnen

Hoe leg je een lijn vast? In $\mathbb{R}^2$ werkt het vertrouwde $y = ax + b$ voor (bijna) alle lijnen. Maar in $\mathbb{R}^n$ is er niet één zo'n vergelijking. In plaats daarvan beschrijven we een lijn door een punt p erop aan te geven, en de richting r waarin de lijn loopt. Hierbij zijn p en r vectoren in de $\mathbb{R}^n$.

Alle punten op de lijn zijn van de vorm $p + rt$ voor een zekere $t \in \mathbb{R}$ en voor elke $t \in \mathbb{R}$ krijgen we een punt op de lijn. Je kan hieraan denken alsof een punt zich beweegt over de lijn: op tijdstip t bevindt het zich op positie $p + rt$.

Voorbeeld 12. De lijn door $(-1, 3)$ in de richting $(4, 2)$ bestaat uit de punten

$$(-1,3) + t(4,2) \qquad \text{met } t \in \mathbb{R}.$$

Bijvoorbeeld ligt het punt $(3, 5)$ op deze lijn, evenals het punt $(1, 4)$.

Omdat dit voorbeeld in $\mathbb{R}^2$ is, kunnen we hier ook een vergelijking van de vorm $y = ax + b$ proberen te vinden. Merk op dat de coördinaten van punten worden gegeven door

$$x = 4t - 1 \quad \text{en} \quad y = 2t + 3.$$

Hieruit kunnen we zien dat $y - \frac{1}{2}x$ altijd gelijk is aan $\frac{7}{2}$, dus de vergelijking is $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Een andere manier om een lijn vast te leggen is door twee (verschillende) punten aan te wijzen die erop liggen. Immers, door ieder tweetal punten gaat precies één lijn. Als de punten p en q gegeven zijn, dan is de richting van de lijn $q - p$ (teken een plaatje). We kunnen de punten op deze lijn dus omschrijven als $p + (q-p)t$ voor $t \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld 13. De lijn door de punten $p = (0, 0, 1)$ en $q = (1, -1, 0)$ heeft richting $(1, -1, -1)$. De punten erop worden dus gegeven door $(0, 0, 1) + t(1, -1, -1)$ voor $t \in \mathbb{R}$.

Deze beschrijving van een lijn is zeker niet uniek. We kunnen beginnen vanaf enig punt p op de lijn. Bovendien kunnen we de richting r altijd vervangen door ieder veelvoud van r, behalve $0r = 0$.

Definitie 14. Twee lijnen $p_1 + tr_1$ en $p_2 + tr_2$ heten *evenwijdig* (*parallel*) indien $r_1 = \lambda r_2$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$ met $\lambda \neq 0$. Ze heten *loodrecht* indien r_1 en r_2 loodrecht op elkaar staan.

Definitie 15. Zij v, w in $\mathbb{R}^n$, dan heet $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ de (loodrechte) *projectie* van v op w indien $\bar{v} = \lambda w$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$ en $v - \bar{v}$ loodrecht op w staat.

Stelling 16. *Zij v, w in $\mathbb{R}^n$. Laat $c = \frac{v \cdot w}{w \cdot w}$. Dan is $\bar{v} = cw$ de loodrechte projectie van v op w.*

Bewijs. Per constructie is $\bar{v}$ een veelvoud van w. We hoeven dus alleen te controleren dat $v - \bar{v}$ loodrecht op w staat.

$$\begin{aligned} (v - \bar{v}) \cdot w &= v \cdot w - \bar{v} \cdot w \\ &= v \cdot w - \left(\tfrac{v \cdot w}{w \cdot w} w\right) \cdot w \\ &= v \cdot w - \left(\tfrac{v \cdot w}{w \cdot w}\right) w \cdot w \\ &= v \cdot w - v \cdot w = 0. \end{aligned}$$

□

De scalar c heet ook wel de *component* van v in de richting w. Merk op dat als w een eenheidsvector is, de noemer van c verdwijnt.

Voorbeeld 17. We bepalen de afstand van het punt $v = (1, 1, 1)$ tot de lijn $p + tr$ voor $p = (0, 0, 1)$ en $r = (1, 0, -1)$. Door alles te verschuiven over $-p$ krijgen we een nieuw punt $w = (1, 1, 0)$ en een nieuwe lijn, die door de oorsprong gaat en nog steeds richting r heeft. We bepalen de loodrechte projectie van w op (de lijn in de richting) r.

$$c = \frac{w \cdot r}{r \cdot r} = \frac{1}{2},$$

dus $\bar{w} = \frac{1}{2} r$. De vector $w - \bar{w}$ staat loodrecht op de lijn door r en gaat vanaf het punt $\bar{w}$ op deze lijn naar het punt w. De afstand van w tot de lijn is dus

$$\|w - \bar{w}\| = \|(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})\| = \frac{1}{2}\|(1, 2, 1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

Vlakken in de ruimte

Hoe leggen we een vlak in $\mathbb{R}^3$ vast? Denk bijvoorbeeld aan het xy-coördinaatvlak. Dit bestaat precies uit de punten waarvan de z-coördinaat 0 is. Een andere manier om dit te zeggen is dat het de vectoren zijn die loodrecht op $(0, 0, 1)$ staan. Een vergelijking wordt dus gegeven door

$$(x, y, z) \cdot (0, 0, 1) = 0.$$

Wanneer we $(0, 0, 1)$ vervangen door een andere vector n, krijgen we het vlak van vectoren die loodrecht staan op n. We noemen n de *normaalvector* van dit vlak.

Een vlak dat niet (noodzakelijk) door de oorsprong gaat, maar door het punt p, dan gaat dit als volgt. Op dit vlak liggen de vectoren v die voldoen aan

$$(v - p) \cdot n = 0,$$

waarbij n opnieuw de normaalvector van het vlak is.

We kunnen deze formule ook opschrijven als $v \cdot n = p \cdot n$. Wanneer we dit uitschrijven in de coördinaten, krijgen we een vergelijking van de vorm $ax + by + cz = d$.

De p en n in deze vergelijking zijn zeker niet uniek: we kunnen voor p ieder punt in het vlak nemen, en we kunnen n door ieder veelvoud vervangen, behalve $0n = 0$.

Definitie 18. We noemen twee vlakken *loodrecht* wanneer hun normaalvectoren loodrecht op elkaar staan. Twee vlakken met normaalvectoren n_1 en n_2 zijn *evenwijdig* (*parallel*) wanneer $n_1 = \lambda n_2$ geldt voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$ met $\lambda \neq 0$.

Voorbeeld 19. We bepalen het vlak door de oorsprong dat de vectoren $(1, 1, 0)$ en $(0, 0, 2)$ bevat. De normaalvector $n = (n_1, n_2, n_3)$ van dit vlak staat loodrecht op deze beide vectoren, dus

$$(1, 1, 0) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0 \quad \text{en} \quad (0, 0, 2) \cdot (n_1, n_2, n_3) = 0.$$

Het is eenvoudig in te zien dat de vector $n = (1, -1, 0)$ een normaalvector van dit vlak is. Een vergelijking voor dit vlak is dus $x - y = 0$. (Maak een tekening.)

Voorbeeld 20. We bepalen het vlak door de punten $a = (1, 1, 0)$, $b = (0, 0, 2)$ en $c = (-1, 4, -1)$. De normaalvector $n = (n_1, n_2, n_3)$ van dit vlak moet loodrecht staan op $b - a$ en $c - a$ (onder andere). Er geldt dus

$$\begin{aligned} 0 &= (b - a) \cdot n = -n_1 - n_2 + 2n_3 \\ 0 &= (c - a) \cdot n = -2n_1 + 3n_2 - n_3. \end{aligned}$$

Het is eenvoudig in te zien dat $n = (1, 1, 1)$ aan deze vergelijkingen voldoet. Het vlak bestaat dus uit de vectoren v die voldoen aan $v \cdot n = a \cdot n$. Een vergelijking voor dit vlak is

$$x + y + z = 2.$$

Voorbeeld 21. We bepalen de afstand van het punt $q = (1, 1, 1)$ tot het vlak $v \cdot n = p \cdot n$ met $n = (2, -1, 0)$ en $p = (0, 3, 0)$. Deze afstand is de lengte van de loodrechte projectie van $q - p$ op n. (Teken een plaatje!) We berekenen

$$c = \frac{(q - p) \cdot n}{n \cdot n} = \frac{(1, -2, 1) \cdot (2, -1, 0)}{(2, -1, 0) \cdot (2, -1, 0)} = \frac{4}{5},$$

dus de projectie is $\bar{q} = cn = (\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, 0)$. De afstand is dus $\|\bar{q}\| = \frac{4}{5}\|(2, -1, 0)\| = \frac{4}{5}\sqrt{5}$.