More points, lines, and planes

Make your own pictures!

1. Lengtes en hoeken

In het vorige college hebben we het inwendig product (inproduct) gedefinieerd. Aan de hand daarvan hebben we ook de norm (lengte) van een vector gedefinieerd. Deze lengte komt in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ overeen met de lengte die we al lang kenden, dus daar zal geen verwarring van komen.

Het feit dat we dit begrip in $\mathbb{R}^n$ ook lengte noemen, doet vermoeden dat het in $\mathbb{R}^n$ soortgelijke eigenschappen heeft als de lengte die je in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ gewend bent. Het gevolg van de volgende propositie zegt dat dit inderdaad het geval is.

Propositie 1.1. *(ongelijkheid van Cauchy-Schwarz) Zij $v, w \in \mathbb{R}^n$ twee vectoren. Dan geldt $|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$.*

Proof. Voor elke $t \in \mathbb{R}$ geldt $\|tv - w\|^2 = (tv - w) \cdot (tv - w) \geq 0$. Door het inproduct uit te schrijven vinden we

$$0 \leq (tv - w) \cdot (tv - w) = \|v\|^2 \cdot t^2 - 2(v \cdot w) \cdot t + \|w\|^2.$$

Dit geldt voor alle t, dus het kwadratische polynoom $at^2 + bt + c$ met $a = \|v\|^2$, $b = -2(v \cdot w)$ en $c = \|w\|^2$, is nooit negatief. Dat betekent dat de discriminant $b^2 - 4ac$ negatief of nul is, dus $b^2 \leq 4ac$. Met andere woorden, $(v \cdot w)^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$. Links en rechts wortel trekken geeft het gevraagde, want $\|v\| \cdot \|w\|$ is niet negatief, dus we hoeven geen absolute waarde te nemen. $\square$

Gevolg 1.2. *(driehoeksongelijkheid) Zij $v, w \in \mathbb{R}^n$ twee vectoren. Dan geldt $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.*

Proof. Vanwege de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz geldt

$$\|v+w\|^2 = (v+w)\cdot(v+w) = v\cdot v + w\cdot w + 2(v\cdot w) \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2.$$

Omdat $\|v + w\|$ en $\|v\| + \|w\|$ beide niet negatief zijn, volgt het gestelde na worteltrekken. $\square$

Maak zelf een tekening om te zien waarom dit de driehoeksongelijkheid genoemd wordt.

Wegens de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz ligt het quotient $(v\cdot w)/(\|v\| \cdot \|w\|)$ in het interval $[-1, 1]$. We kunnen daarom als volgt ook de hoek tussen twee vectoren definiëren.

Definitie 1.3. *Gegeven twee vectoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ definiëren we de hoek tussen v en w als het getal $\varphi \in [0, \pi]$ waarvoor geldt*

$$\cos\varphi = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Het is nu ook duidelijk waarom we twee vectoren v, w loodrecht noemen als er geldt $v \cdot w = 0$. Dan geldt namelijk dat de hoek tussen v en w gelijk is aan $\pi/2$.

Omdat de cosinus een bijectie geeft tussen de intervallen $[0, \pi]$ en $[-1, 1]$ is de hoek hiermee goed gedefinieerd. Wel moeten we ons natuurlijk afvragen of deze nieuwe definitie van hoek overeenkomt met de gebruikelijke hoek tussen twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, die we ons hele leven al kennen. Bovendien doet het woord hoek weer vermoeden dat dit begrip zich op een of andere manier hetzelfde gedraagt in

$\mathbb{R}^n$ als in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Het antwoord op beide kwesties is dat met deze definitie de cosinusregel in een driehoek geldt: gegeven twee vectoren v en w en hoek φ tussen v en w, geldt

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos\varphi.$$

Maak weer een plaatje waarin duidelijk wordt in welke driehoek dit de cosinusregel is. Voor het bewijs van de cosinusregel, zie opgave 1.3.

Voorbeeld 1.4. *In $\mathbb{R}^3$ bekijken we de vectoren $v = (1, 2, -1)$ en $w = (2, 1, -3)$. We hebben $\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$ en $\|w\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$. Verder geldt $v \cdot w = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) = 7$, dus de hoek φ tussen v en w voldoet aan*

$$\cos\varphi = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|} = \frac{7}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{7}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Voorbeeld 1.5. *In $\mathbb{R}^n$ bekijken we de vectoren $v = (1, 1, \ldots, 1)$ en $w = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. We hebben $\|v\| = \sqrt{n}$ en $\|w\| = 1$, terwijl geldt $v \cdot w = 1$. De hoek φ tussen v en w voldoet dus aan $\cos\varphi = 1/\sqrt{n}$. Hoe hoger de dimensie n, des te dichter de cosinus bij 0 ligt, dus des te groter de hoek tussen de vectoren (die voor grote dimensie bijna loodrecht op elkaar staan).*

Opgave 1.1. *Bereken de hoek tussen de gegeven vectoren (vervoudig $\cos^{-1}(x)$ alleen als er een precies antwoord uit komt; geef geen benaderingen).*

- $v = (1, 2)$ *en* $w = (2, 1)$.
- $v = (2, 3, 4)$ *en* $w = (-1, 2, 3)$.
- $v = (1, -1, 1, -1)$ *en* $w = (-1, 1, -1, 1)$.
- $v = (1, 2, 1, 3)$ *en* $w = (1, 4, 1, 5)$.
- $v = (1, 1, \ldots, 1)$ *en* $w = (-1, -1, \ldots, -1)$ *in* $\mathbb{R}^n$.
- $v = (1, 1, \ldots, 1)$ *en* $w = (1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0)$ *in* $\mathbb{R}^{2n}$.

Opgave 1.2. *Waar of niet waar? Geef een argument of een tegenvoorbeeld.*

- *Als voor drie vectoren $v, w, x \in \mathbb{R}^n$ geldt $v \cdot x = w \cdot x$ en x is niet nul, dan geldt $v = w$.*
- *Voor elke twee vectoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ geldt $\|v - w\| \leq \|v\| + \|w\|$.*

Opgave 1.3. *Bewijs de cosinusregel in $\mathbb{R}^n$.*

Opgave 1.4. *Bewijs dat de diagonalen van een parallellogram loodrecht op elkaar staan dan en slechts dan als alle zijden van het parallellogram gelijke lengte hebben.*

2. Vlakken en afstand van een punt tot een vlak

Nu we gezien hebben dat de gedefinieerde begrippen hoek en lengte in $\mathbb{R}^n$ zich op veel manieren hetzelfde gedragen als in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, kunnen we ons richten op het werken met deze begrippen. In het bijzonder willen we vergelijkingen en parametrisaties voor vlakken en hun hoger-dimensionale generalisaties kunnen opstellen, en afstanden berekenen van bijvoorbeeld een punt tot een vlak, of tussen twee niet-snijdende lijnen.

Zoals gezegd in de aantekeningen van het tweede college, kan een vlak V in $\mathbb{R}^3$ gegeven worden door een normaalvector n te specificeren en een punt p dat op het vlak ligt (Nu is n dus niet meer de dimensie die het voorheen was). In verzamelingnotatie schrijven we dan

$$V = \{v \in \mathbb{R}^3 \ : \ n \cdot v = n \cdot p\}.$$

Hierbij moet je in de vergelijking $n \cdot v = n \cdot p$ dus aan v denken als de variabele. Als we namen kiezen voor de coordinaten van $\mathbb{R}^3$ (wat tot nog toe nog niet hoefde!), zoals x, y, z, dan kunnen we schrijven $v = (x, y, z)$, zodat de variabele vector v uitgedrukt wordt in de variabelen x, y, z. Schrijven we de vector n als $n = (a, b, c)$, dan wordt de vergelijking voor V dus

$$ax + by + cz = d,$$

met $d = n \cdot p$. De coordinaten van n zijn dus de coefficienten in de vergelijking. Dit vlak staat loodrecht op n. Wat gebeurt er als we d veranderen? Het vlak V', gegeven door $ax + by + cz = d'$ staat ook loodrecht op n en loopt dus parallel aan het vlak V.

Voorbeeld 2.1. *Het vlak gegeven door $2x + 3y - z = 4$ staat loodrecht op de vector $n = (2, 3, -1)$, dus het vlak wordt ook gegeven door $n \cdot v = 4$. Het punt $p = (1, 1, 1)$ ligt op het vlak, dus we kunnen de vergelijking ook schrijven als $n \cdot v = n \cdot p$.*

Door twee coördinaten vrij te kiezen, volgt de derde automatisch (tenzij de coëfficiënt van de derde coördinaat toevallig 0 is, in welk geval je twee andere coördinaten kunt kiezen). Op deze manier kunnen we vlakken parametriseren.

Voorbeeld 2.2. *Bekijk het vlak van het vorige voorbeeld. Kies $y = s$ en $z = t$, dan volgt $x = 2 - \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t$. Dit geeft een parametrisatie die we ook kunnen scrijven als*

$$(x, y, z) = (2 - \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t, s, t) = (2, 0, 0) + s(-\frac{3}{2}, 1, 0) + t(\frac{1}{2}, 0, 1).$$

Merk op dat $(2, 0, 0)$ een punt op het vlak is, terwijl $(-\frac{3}{2}, 1, 0)$ en $(\frac{1}{2}, 0, 1)$ vectoren zijn die loodrecht staan op n. Zo kan een vlak altijd gegeven worden: alle punten/vectoren die te schrijven zijn als de som van een gegeven vast punt en willekeurige veelvouden van twee andere vectoren (die niet per ongeluk zelf veelvouden van elkaar zijn).

Voorbeeld 2.3. *Gegeven de vlakken $V : x + y + z = 2$ en $W : 2x + y - z = 3$ willen we het vlak X door het punt $p = (1, 1, 1)$ bepalen dat loodrecht staat op de snijlijn L van V en W.*

Eerste methode: de snijlijn L voldoet aan beide vergelijkingen. We kunnen L parametriseren door $z = s$ te kiezen en op te lossen voor x en y. We krijgen

$$L = \{(1 + 2s, 1 - 3s, s) \ : \ s \in \mathbb{R}\} = \{(1, 1, 0) + s(2, -3, 1) \ : \ s \in \mathbb{R}\}.$$

De richting van L wordt dus gegeven door de vector $n = (2, -3, 1)$, die een normaalvector is van het gezochte vlak X, dat dus gegeven wordt door $n \cdot v = n \cdot p$.

Tweede methode: De normaalvector $n_V = (1, 1, 1)$ van V staat loodrecht op alle vectoren in V, dus zeker op de snijlijn L met W. Net zo staat de normaal $n_W = (2, 1, -1)$ loodrecht op alle vectoren in W, dus zeker op L. Het gezochte vlak X wordt dus gegeven door

$$X = \{p + sn_V + tn_W \ : \ s, t \in \mathbb{R}\} = \{(1 + s + 2t, 1 + s + t, 1 + s - t) \ : \ s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Voorbeeld 2.4. *Geven zijn de vectoren $v = (1, 2, 1)$ en $w = (7, -1, 2)$ en het punt $p = (1, 1, 1)$. Het vlak V is gedefinieerd als*

$$V = \{p + sv + tw \ : \ s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Het is niet moeilijk een normaalvector $n = (a, b, c)$ te bepalen die loodrecht op v en w staat, door een systeem van twee lineaire vergelijkingen in a, b, c op te lossen. Er moet gelden

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & c & = & 0, \\ 7a & - & b & + & 2c & = & 0. \end{array}$$

We trekken 7 keer de eerste vergelijking van de tweede af om een vergelijking in alleen b en c te krijgen. Dit geeft

$$-15b - 5c = 0,$$

dus $3b+c = 0$. Later zullen we leren hoe systematisch stelsels lineaire vergelijkingen op te lossen. Nu kiezen we $b = 1$, wat leidt tot $c = -3$ en $a = 1$. De vector $n = (1, 1, -3)$ is dus een normaalvector voor V en V wordt gegeven door $n \cdot v = n \cdot p$.

Definitie 2.5. *Gegeven een punt x en een vlak V in $\mathbb{R}^3$. De projectie van x op V is een punt x' in V zodanig dat $x - x'$ loodrecht staat op alle vectoren in V.*

Maak een tekening!

Later zullen we zien hoe je direct de projectie van een punt op een vlak kunt berekenen, ook in hogere dimensies. De volgende propositie laat zien dat je in $\mathbb{R}^3$ de normaalvector van het vlak kunt gebruiken om de projectie te bepalen. Maak weer een tekening!

Propositie 2.6. *Zij V een vlak in $\mathbb{R}^3$ en n een normaalvector van V. Zij p een punt in V en x een willekeurig punt in $\mathbb{R}^3$. Als x' de projectie is van x op V, dan is $x - x'$ de projectie van $x - p$ op n en er geldt*

$$x - x' = \frac{(x-p) \cdot n}{\|n\|^2} \cdot n$$

en

$$x' = x - \frac{(x-p) \cdot n}{\|n\|^2} \cdot n.$$

Proof. Schrijf $z = x - x'$. Omdat z loodrecht staat op V, is z een veelvoud van de normaalvector n van V. Om te bewijzen dat z de projectie van $x - p$ op n is, is het dus voldoende te bewijzen dat $(x - p) - z$ loodrecht staat op n. Er geldt $(x - p) - z = x' - p$ en dit is een vector in V, dus die staat inderdaad loodrecht op n. Er geldt dus dat $x - x'$ gelijk is aan cn met $c = ((x-p) \cdot n)/\|n\|^2$, zie Stelling 17 van de aantekeningen bij college 2. Dit bewijst de eerste vergelijking en de tweede volgt direct. $\square$

Voorbeeld 2.7. *Zij V het vlak van Voorbeeld 2.1 met normaalvector $n = (2, 3, -1)$ en een het punt $p = (1, 1, 1)$ op V. De projectie van het punt $x = (7, 5, 11)$ op V is dan*

$$x' = x - \frac{(7-1, 5-1, 11-1) \cdot n}{\|n\|^2} \cdot n = x - \frac{6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 10 \cdot (-1)}{2^2 + 3^2 + (-1)^2} n = x - n = (5, 2, 12).$$

De afstand van x tot het vlak V is dan de lengte van $x - x' = n$, dus gelijk aan $\sqrt{14}$.

Als we alleen de afstand van een punt tot een vlak willen bepalen, dan is het niet nodig om eerst de projectie x' van x op V te bepalen. Dit kan namelijk direct met het volgende gevolg van de zojuist bewezen propositie.

Gevolg 2.8. *Zij V een vlak in $\mathbb{R}^3$ en n een normaalvector van V. Zij p een punt in V en x een willekeurig punt in $\mathbb{R}^3$. Dan is de afstand van x tot V gelijk aan*

$$\frac{|(x-p)\cdot n|}{\|n\|}.$$

Proof. Zij x' de projectie van x op V. Dan is de afstand van x tot V gelijk aan de lengte van

$$x - x' = \frac{(x-p)\cdot n}{\|n\|^2}\cdot n.$$

Deze lengte is precies het gegevene, want $\|cn\| = |c|\|n\|$, met $c = ((x-p)\cdot n)/\|n\|^2$. □

Voorbeeld 2.9. *Het vlak V in $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven door $x - y + 5z = 2$. Stel we willen de afstand bepalen van het punt $x = (3,4,5)$ tot V. Een normaalvector voor V is $n = (1,-1,5)$ en $p = (1,-1,0)$ is een punt op V. De afstand is dus*

$$\frac{|(x-p)\cdot n|}{\|n\|} = \frac{|(2,5,5)\cdot(1,-1,5)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2}} = \frac{22}{\sqrt{27}} = \frac{22\sqrt{3}}{9}.$$

Opgave 2.1. *Een vlak in $\mathbb{R}^3$ kan onder andere gegeven worden door een vergelijking (in x, y, z) van de vorm $ax + by + cz = d$ of een vergelijking (in v) van de vorm $n \cdot v = n \cdot p$, maar ook door een punt p in V aan te geven en twee niet-nul vectoren in het vlak die geen veelvouden van elkaar zijn. In verzamelingnotatie schrijven we*

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax + by + cz = d\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 \ : \ n \cdot v = n \cdot p\} \\ &= \{p + sx_1 + tx_2 \ : \ s, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

voor geschikt gekozen $p, n, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ en $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Geef elk van de drie schrijfwijzen voor de volgende vlakken.

(1) *Het vlak met normaalvector $n = (1,3,5)$ door het punt $(-1,-1,2)$.*
(2) *Het vlak gegeven door $x - y + z = 11$.*
(3) *Het vlak door het punt $(2,3,1)$ waar de vectoren $(1,1,0)$ en $(2,1,0)$ in liggen.*
(4) *Het vlak door het punt $p = (1,2,3)$ dat parallel is aan het vlak gegeven door $x + y + 2z = 1$.*
(5) *Het vlak door de punten $p = (1,2,-1)$, $q = (2,1,0)$ en $r = (3,1,-1)$. (Hint: zie voorbeeld 21 van de aantekeningen van college 2)*
(6) *Het vlak door de oorsprong dat loodrecht staat op de snijlijn van de vlakken in (1) en (2). (Hint: zie voorbeeld 2.3)*

Opgave 2.2. *Bepaal de projectie van het punt $(3,-2,1)$ op enkele van de vlakken in de opgave 2.1 en bereken de afstand van het punt tot het vlak.*

Opgave 2.3. *Bepaal de afstand van het punt $(8,1,1)$ tot de vlakken in opgave 2.1.*