Eerste huiswerkopdracht Lineaire algebra 1

October 2, 2010

Dit huiswerkexamen moest maandag 27 september 2010, uitgewerkt in LaTeX, worden ingeleverd aan het begin van het college. Vergat niet je naam en studentennummer op het materiaal te zetten dat je inlevert. Overleggen mocht, maar je moest het zelf opschrijven. Kopiëren mocht dus niet.

- **Opgave 1:**

  Gegeven vectoren a en b in $\mathbb{R}^3$. Het *uitproduct* van vector a en b met $a = (a_1, a_2, a_3)$ en $b = (b_1, b_2, b_3))$ is de vector

  $$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \tag{1}$$

  a) Laat zien dat $a \times b$ loodrecht op a en b staat.

  b) Laat zien dat $||a \times b||^2 = ||a||^2||b||^2 - (a \cdot b)^2$

  c) Laat zien dat $||a \times b|| = ||a||\,||b|| \sin(\theta)$, met θ de hoek tussen a en b.

  d) Laat zien dat het oppervlak van het parallellogram opgespannen door de vectoren a en b gelijk is aan $||a \times b||$.

  Oplossing:

  a) Per definitie staat $a \times b$ loodrecht op a als geldt $\langle a, a \times b\rangle = 0$. Evenzo staat $a \times b$ loodrecht op b wanneer geldt $\langle b, a \times b\rangle = 0$. We berekenen

  $$\begin{aligned}\langle a, a \times b\rangle &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)\\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1\\ &= 0\end{aligned}$$

  en

  $$\begin{aligned}\langle b, a \times b\rangle &= b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1)\\ &= a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2 + a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3\\ &= 0\end{aligned}$$

  dus inderdaad staat $a \times b$ loodrecht op a en b.

  Alternatieve oplossing. Na te laten zien dat geldt $\langle a, a \times b\rangle = 0$, hoeven we niet nog een keer hetzelfde te doen voor b. We kunnen ook opmerken dat $b \times a = -a \times b$, wat direct uit de definitie van het uitproduct volgt. We hebben al bewezen dat geldt $\langle a, a \times b\rangle = 0$. Door de variabelen te hernoemen zien we dat dan ook geldt $\langle b, b \times a\rangle = 0$. Er volgt

  $$\langle b, a \times b\rangle = \langle b, -b \times a\rangle = -\langle b, b \times a\rangle = -0 = 0$$

  zonder nogmaals in coördinaten uit te schrijven.

b) Deze identiteit kunnen we bewijzen door het in coördinaten uit te schrijven. Er geldt

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 &= \langle a \times b, a \times b \rangle \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\
&= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 \\
&\quad + \ a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \\
&= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 \\
&\quad - \ (a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + 2a_1 a_3 b_1 b_3 + 2a_2 a_3 b_2 b_3) \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\
&= \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2
\end{aligned}$$

zoals we moeten bewijzen.

c) We weten dat geldt

$$\cos\theta = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$

wat we ook kunnen schrijven als $\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos\theta$. Met behulp daarvan en onderdeel b) zien we dat geldt

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2 &= \|a\|^2 \|b\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2\theta \\
&= \|a\|^2 \|b\|^2 (1 - \cos^2\theta) = \|a\|^2 \|b\|^2 \sin^2\theta.
\end{aligned}$$

In de laatste stap gebruiken we de bekende regel $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Tenslotte nemen we de wortel van bovenstaande vergelijking. Dit mag omdat alle lengtes niet-negatief zijn en bovendien geldt $\sin\theta \geq 0$ omdat θ tussen 0 en π ligt. We concluderen dat inderdaad geldt $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin\theta$.

d) De oppervlakte van het parallellogram is het product van een basis en de hoogte van het parallellogram ten opzicht van die basis. Kies (bijvoorbeeld) de vector a als basis, dan is de hoogte gelijk aan de lengte van de component van b die loodrecht staat op a. Met de regel "$\sin\theta$ is overstaande zijde gedeeld door schuine zijde" zien we dat de hoogte gelijk is aan $\|b\| \sin\theta$. De lengte van de basis is $\|a\|$, dus het oppervlak is $\|a\| \|b\| \sin\theta = \|a \times b\|$.

- **Opgave 2:**

  Waar of niet waar? Geef een kort bewijs of een tegenvoorbeeld.

  a) Gegeven twee vectoren $v, w \in \mathbb{R}^n$. Als er geldt $\langle v, w\rangle = 0$, dan geldt ook $v = 0$ of $w = 0$.
  b) Gegeven twee vectoren $v, w \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt $||v + w|| = ||v - w||$ dan en slechts dan als v en w loodrecht op elkaar staan.
  c) Voor elke twee vectoren v, w in $\mathbb{R}^n$ geldt $||v - w|| \leq ||v|| + ||w||$.

  Oplossing:

  a) Niet waar. De vectoren $v = (1, 0)$ en $w = (0, 1)$ vormen een tegenvoorbeeld.
  b) Omdat lengtes niet negatief zijn mogen we kwadrateren en is het voldoende om te laten zien dat v en w loodrecht op elkaar staan dan en slechts dan als $\|v + w\|^2 = \|v - w\|^2$. Nu geldt

  $$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle + 2\langle v, w\rangle$$

  en

  $$\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle - 2\langle v, w\rangle$$

  wegens bilineariteit van het inproduct. Dit impliceert dat er geldt $\|v + w\|^2 = \|v - w\|^2$ dan en slechts dan als $2\langle v, w\rangle = -2\langle v, w\rangle$, dus als $\langle v, w\rangle = 0$, wat per definitie betekent dat v en w loodrecht op elkaar staan.
  c) We passen de driehoeksongelijkheid toe op de vectoren v en $-w$. Dan volgt

  $$\|v - w\| = \|v + (-w)\| \leq \|v\| + \| - w\| = \|v\| + \|w\|,$$

  waarbij de laatste gelijkheid volgt uit $\|\lambda w\| = |\lambda| \cdot \|w\|$ met $\lambda = -1$.

- **Opgave 3:**

  Gegeven drie punten $P_1 = (1,1,3)$, $P_2 = (2,2,4)$ en $P_3 = (3,1,2)$ in $\mathbb{R}^3$.

  a) Bepaal een vergelijking voor het vlak V_1 door de punten P_1, P_2 en P_3.

  Een tweede vlak V_2 gaat door het punt $Q = (0,2,1)$ en wordt gekarakteriseerd door een normaalvector $n = (1,0,1)$.

  b) Bepaal een vergelijking voor vlak V_2.
  c) Bepaal de afstand van het punt P_1 tot het vlak V_2.
  d) Bepaal de hoek tussen de vlakken V_1 en V_2 (dat is de hoek tussen de normaalvectoren).
  e) Bepaal met behulp van het uitproduct de richtingsvector van de snijlijn van de vlakken V_1 en V_2. Geef nu een parameter–representatie van de snijlijn van de vlakken V_1 en V_2.

  Oplossing:

  a) Merk allereerst op dat $P_2 - P_1 = (1,1,1)$ en dat $P_3 - P_1 = (2,0,-1)$, en dat de parametrisatie van V_1 gegeven wordt door

  $$x = P_1 + s(P_2 - P_1) + t(P_3 - P_1).$$

  Om hiervan een vergelijking van de vorm $\langle a, x\rangle = b$ te maken, merken we op dat voor zo'n vector a moet gelden dat $\langle a, P_2 - P_1\rangle = \langle a, P_3 - P_1\rangle = 0$. We vinden deze a dan door $P_2 - P_1$ en $P_3 - P_1$ als rijen in een matrix te zetten, en dan Gauss-eliminatie toe te passen om de matrix in rijtrapvorm te krijgen.

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2R_1 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \times -\frac{1}{2} \end{array}$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

  We bekijken de (enige) kolom zonder hoofdelement (Nederlands voor *pivot*). Voor de vector $a = (a_1, a_2, a_3)$ nemen we dus alleen de laatste coördinaat vrij. In dit geval zal $a_3 = 2$ een handige keuze blijken, omdat we daarmee noemers vermijden. Bij de rijen van onze matrix horen de volgende vergelijkingen:

  $$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_2 + \tfrac{3}{2}a_3 &= 0 \end{aligned}$$

  We zien dan (van onder naar boven) dat $a_2 = -3$ en $a_1 = 1$. Dus $a = (1,-3,2)$. Vervolgens bepalen we de constante b. Deze is namelijk gelijk aan $\langle a, P_1\rangle = 4$. Dus wordt V_1 gegeven door $\langle a, x\rangle = 4$ met $a = (1,-3,2)$.

  b) Omdat n een normaalvector is van V_2, weten we dat een vergelijking van V_2 van de vorm $\langle n, x\rangle = b$ is, voor een zekere constante b. Deze constante is gelijk aan $\langle n, Q\rangle = 1$. We concluderen dat een vergelijking van V_2 gegeven wordt door $\langle n, x\rangle = 1$.

  c) Merk allereerst op dat $v = (1,1,0)$ in het vlak V_2 ligt. (Want $\langle n, v\rangle = 1$. Deze keuze van v zal later handig blijken, maar elke andere vector in V_2 werkt ook.) Dus we transleren over $-v$. We krijgen dan:

  $$\begin{aligned} P' &= T_{-v}(P_1) = (1,1,3) - (1,1,0) = (0,0,3) \\ V' &= T_{-v}(V_2) : \langle n, x\rangle = 0, \end{aligned}$$

en de afstand tussen P_1 en V_2 is gelijk aan die tussen P' en V'. Deze laatste gaan we nu uitrekenen.

Merk op dat we P' kunnen opschrijven als $P' = x + y$, waar $x \perp V'$ (dus $x = \lambda n$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$), en waar $y \in V'$. Dan is de afstand van P' tot V' gelijk aan $\|x\|$. Merk nu op dat x gelijk is aan de projectie van P' op n. Dus:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\langle P', n\rangle}{\|n\|^2} n \\ &= \tfrac{3}{2} n. \end{aligned}$$

Dus de afstand van P_1 tot V_2 is gelijk aan $\|x\| = \frac{3}{2}\|n\| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

d) Merk op dat de hoek tussen V_1 en V_2 gelijk is aan de hoek α tussen hun normaalvectoren a en n. Hiervoor geldt:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\langle a, n\rangle}{\|a\|\|n\|} \\ &= \tfrac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}} \\ &= \tfrac{3}{14}\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Dus $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{14}\sqrt{7}\right)$.

e) De snijlijn L van de vlakken V_1 en V_2 ligt per definitie in beide vlakken. De richtingsvector v van L staat dus loodrecht op beide normaalvectoren a en n van V_1 en V_2 respectievelijk. Dit betekent dat we voor $v = a \times n = (-3, 1, 3)$ kunnen nemen. Hieruit volgt ook dat L een parametrisatie van de vorm $x = p + tv$ heeft, waar p een vector is in L. Dat wil zeggen, p voldoet aan de vergelijkingen $\langle a, p\rangle = 4$ en $\langle n, p\rangle = 1$. Dus we vinden deze p door in een matrix als eerste rij n en 1 en als tweede rij a en 4 te zetten, en dan Gauss-eliminatie toe te passen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -R_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -1 \end{array}\right)$$

Merk op dat alleen de derde kolom geen hoofdelement bevat. We kunnen voor $p = (p_1, p_2, p_3)$ de derde coördinaat vrij kiezen. Neem bijvoorbeeld $p_3 = 0$. Bij de rijen van onze matrix horen de vergelijkingen

$$\begin{aligned} p_1 + p_3 &= 1 \\ p_2 - \tfrac{1}{3}p_3 &= -1, \end{aligned}$$

en dus volgt direct uit $p_3 = 0$ dat $p_1 = 1$ en $p_2 = -1$. We kunnen dus $p = (1, -1, 0)$ nemen, en onze parametrisatie wordt dan $L : x = p + tv$ met $p = (1, -1, 0)$, $v = (-3, 1, 3)$.

- **Opgave 4:**

Gegeven zijn de vectoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, -1, 3), \\ v_2 &= (2, 1, 0, 2), \\ v_3 &= (1, 1, 1, 1), \\ v_4 &= (0, -3, 1, 2), \\ v_5 &= (1, -1, 0, 1). \end{aligned}$$

Zij $V \subset \mathbb{R}^4$ geparametriseerd met parameters s en t door $x = sv_1 + tv_2$ en zij $W \subset \mathbb{R}^4$ geparametriseerd met parameters r, s, t door $x = rv_3 + sv_4 + tv_5$. Parametriseer de doorsnede $V \cap W$.

Oplossing:

We bepalen eerst genoeg vergelijkingen van de vorm $\langle a, x\rangle = b$ die W definiëren. Voor zulke $a \in \mathbb{R}^4$ geldt $\langle a, v_3\rangle = \langle a, v_4\rangle = \langle a, v_5\rangle = 0$. We zetten de vectoren v_3, v_4, v_5 als rijen in een matrix en bepalen middels Gaussian elimination een row echelon vorm.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -R_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2R_2 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot\frac{1}{5} \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

[Merk op dat we in stap 2 niet rij 2 door -3 gedeeld hebben. Dat zou noemers gecreëerd hebben, dus in plaats daarvan hebben we er een slim veelvoud van een andere rij erbij opgeteld om toch een 1 als pivot te krijgen zonder noemers in de matrix.]

Er is maar één kolom zonder pivot, namelijk de vierde. We krijgen dan ook maar één vergelijking voor W. Voor de vector $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ kiezen we alleen de vierde coördinaat vrij, zeg $a_4 = 5$ (om noemers te voorkomen). De drie rijen horen bij de vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 0, \\ a_2 + 3a_3 + 2a_4 &= 0, \\ a_3 + \tfrac{4}{5}a_4 &= 0. \end{aligned}$$

Van onder naar boven gebruiken we deze vergelijkingen om te vinden $a_3 = -4$, $a_2 = 2$ en $a_1 = -3$. Omdat W door de oorspong gaat hebben we $b = 0$. We zien dus dat W gegeven wordt door $\langle a, x\rangle = 0$ met $a = (-3, 2, -4, 5)$.

Vullen we hierin de parametrisatie $x = sv_1 + tv_2$ van V in, dan krijgen we vergelijkingen voor die parameters s, t waarvoor x in $V \cap W$ ligt. We krijgen

$$0 = \langle a, x\rangle = s\langle a, v_1\rangle + t\langle a, v_2\rangle = 16s + 6t,$$

dus $s = -\frac{3}{8}t$. Dit betekent dat $V \cap W$ geparametriseerd wordt door

$$x = -\frac{3}{8}tv_1 + tv_2 = \tfrac{1}{8}t(-3v_1 + 8v_2).$$

We mogen ook wel met 8 vermenigvuldigen en zien dat $V \cap W$ wordt geparametriseerd door $x = tv$ met $v = -3v_1 + 8v_2 = (13, 8, 3, 7)$.