Opgaven lineaire algebra, vrijdag 26 november, 2010

(1) Gegeven een lineaire afbeelding $f\colon V \to W$. Neem aan dat V eindig-dimensionaal is. Laat zien dat f surjectief is dan en slechts dan als voor elke $v_1, \ldots, v_r \in V$ met $L(v_1, \ldots, v_r) = V$ geldt $L(f(v_1), \ldots, f(v_r)) = W$.

(2) Bij deze opgave mag je gebruiken dat een polynoom f van graad k over een lichaam F hooguit k verschillende nulpunten in F heeft. Zij n een positief geheel getal en $P_n(F)$ de vectorruimte van polynomen over F van graad ten hoogste n. Neem aan dat $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in F$ onderling verschillend zijn. Zij $T\colon P_n(F) \to F^{n+1}$ de functie gegeven door

$$T(f) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{n+1}))\,.$$

(a) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.
(b) Laat zien dat T injectief is.
(c) Laat zien dat er voor iedere $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ een uniek polynoom $f_i \in P_n(F)$ is zodanig dat $f_i(a_j) = 1$ als $j = i$ en $f_i(a_j) = 0$ als $j \neq i$.
(d) Laat zien dat $(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})$ een basis is voor $P_n(F)$.

(3) Geef een expliciete uitdrukking voor de lineaire afbeelding $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die gegeven wordt door spiegeling in de lijn $y = 3x$.

(4) Voor welke $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$ bestaat het product $A_i \cdot A_j$ en in welke volgorde?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bereken (een aantal van) deze producten.

(5) Voor elke $i \in \{1, , \ldots, 5\}$ definiëren we de lineaire afbeelding f_i door $x \mapsto A_i x$ met A_i als in de vorige opgave.
(a) Wat zijn de domeinen en codomeinen van deze functies?
(b) Welke van deze functies kun je samenstellen en welke matrices horen dan bij de samenstelling (geef alleen aan welke twee matrices je moet vermenigvuldigen en in welke volgorde)?
(c) Is er een volgorde waarop je alle functies kunt samenstellen, en zo ja, welk product van matrices hoort bij deze samenstelling, en wat is het domein en codomein?

(6) Vind twee matrices A en B zodanig dat AB een nulmatrix is (die dus alleen maar nullen bevat), terwijl het product BA ook bestaat, maar geen nulmatrix is.

(7) Gegeven de volgende lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, bepaal een matrix A zodanig dat de afbeelding ook geschreven kan worden als $x \mapsto Ax$.
(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (3x + 2y - z, -x - y + z, x - z, y + z)$,

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x+2y-3z, 2x-y+z, x+y+z)$,
(c) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto x\cdot(1,2)+y\cdot(2,-1)+z\cdot(-1,3)$,
(d) $j\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ v \mapsto (\langle v,w_1\rangle, \langle v,w_2\rangle, \langle v,w_3\rangle)$, met $w_1=(1,-1)$, $w_2=(2,3)$ en $w_3=(-2,4)$.

(8) Gegeven de matrix

$$M = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en de lineaire afbeelding $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Mx$ for de bijbehorende m en n. Wat zijn m en n en wat zijn vectoren $v_1,\dots,v_n$ zodanig dat f ook gegeven wordt door

$$f\big((x_1,x_2,\dots,x_n)\big) = x_1v_1+\ldots+x_nv_n?$$

(9) Bereken de rang van de afbeeldingen en matrices uit opgaven 2,3,4,5,7,8.