Lineaire algebra I (wiskundigen)

Toets, donderdag 27 oktober, 2011

Antwoorden

(1) Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak

$$V = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 3x - y + 2z = 7 \,\}.$$

Bepaal de afstand van het punt $Q = (-5, 4, -1) \in \mathbb{R}^3$ tot het vlak V.

Antwoord: $2\sqrt{14}$.

(2) Bepaal voortbrengers voor de kern van de volgende matrices en bepaal ook de inverse, als die bestaat.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Antwoord: De kern van A wordt voortgebracht door bijvoorbeeld $(1, -2, 0, 1)$ en $(-2, 0, 1, 0)$. De matrix A is is niet inverteerbaar, want hij is niet eens vierkant. Bovendien hebben we net gezien dat inderdaad de kern niet nul is.

De kern van B is wel nul en wordt dus voortgebracht door de lege verzameling, of door 0. De inverse van B is

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Zij $r_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de rotatie van $\mathbb{R}^2$ om de oorsprong $(0, 0)$ over een hoek α.

(a) Bepaal de matrix A zodanig dat voor alle $v \in \mathbb{R}^2$ geldt $r_\alpha(v) = Av$.

(b) Bewijs dat voor alle hoeken α en β geldt

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

Antwoord:

(a) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

(b) Er geldt $r_{\alpha+\beta} = r_\alpha \circ r_\beta$, dus voor de bijbehorende matrices geldt

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}.$$

De elementen in de eerste en laatste matrix zijn dus gelijk, en het vergelijken van de elementen in bijvoorbeeld de eerste kolom geeft precies het gevraagde.

(4) Zij V een vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $s\colon V \to V$ een lineaire afbeelding. Neem aan dat voor alle $v \in V$ geldt $s(s(v)) = v$. Definieer

$$V_+ = \{v \in V \ : \ s(v) = v\},$$
$$V_- = \{v \in V \ : \ s(v) = -v\}.$$

(a) Laat zien dat s een isomorfisme is.
(b) Laat zien dat voor elke $v \in V$ geldt
$$\tfrac{1}{2}(v + s(v)) \in V_+ \qquad \text{en} \qquad \tfrac{1}{2}(v - s(v)) \in V_-.$$
(c) Bewijs dat V_+ en V_- complementaire deelruimtes van V zijn, dus dat er geldt
$$V_+ \cap V_- = \{0\} \qquad \text{en} \qquad V_+ + V_- = V.$$

Antwoord:

(a) Stel in het algemeen dat $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to C$ functies zijn met samenstelling $g \circ f\colon A \to C$. Als de samenstelling $g \circ f$ injectief is, dan is ook f injectief en als de samenstelling $g \circ f$ surjectief is, dan is ook g surjectief. (keukentafel!)
In dit geval nemen we $A = B = C = V$ en $f = g = s$. De samenstelling $s \circ s$ is zowel surjectief als injectief, want het is de identiteit. Uit bovenstaande volgt dus dat s zowel surjectief als injectief is (surjectief door te kijken naar s in de rol van g en injectief door s in de rol van f te bekijken). Dus s is een bijectieve lineaire afbeelding, dus een isomorfisme.

(b) Schrijf $v_+ = \frac{1}{2}(v + s(v))$ en $v_- = \frac{1}{2}(v - s(v))$. Omdat s lineair is, geldt
$$s(v_+) = \tfrac{1}{2}s(v + s(v)) = \tfrac{1}{2}(s(v) + s(s(v))) = \tfrac{1}{2}(s(v) + v) = v_+$$
en
$$s(v_-) = \tfrac{1}{2}s(v - s(v)) = \tfrac{1}{2}(s(v) - s(s(v))) = \tfrac{1}{2}(s(v) - v) = -v_-,$$
dus inderdaad $v_+ \in V_+$ en $v_- \in V_-$.

(c) Stel $v \in V_+ \cap V_-$. Dan geldt zowel $s(v) = v$ als $s(v) = -v$, dus $v = s(v) = -v$, dus $2v = 0$, dus $v = 0$. Hieruit volgt $V_+ \cap V_- = \{0\}$.
Nu moeten we nog laten zien dat er geldt $V_+ + V_- = V$. Stel $v \in V$ en definieer v_+ en v_- als hierboven. Dan geldt $v_+ \in V_+$ en $v_- \in V_-$ en
$$v_+ + v_- = \tfrac{1}{2}(v + s(v)) + \tfrac{1}{2}(v - s(v)) = v,$$
dus geldt $v \in V_+ + V_-$. Dit bewijst $V \subset V_+ + V_-$ en de inclusie de andere kant op is duidelijk. Dus geldt er gelijkheid: $V = V_+ + V_-$.