Lineaire algebra I (wiskundigen)

Voorbeelden van toetsopgaven, 2011

(1) (a) Bepaal de afstand van het punt $Q = (1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$ tot het vlak gegeven door
$$2x + 2y - z = 1.$$
(b) Bepaal de hoek tussen de vectoren $(4, 2, -1, -2)$ en $(2, 0, 2, 1)$ in $\mathbb{R}^4$.

(2) Zij V de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Je hoeft niet te laten zien dat V inderdaad een vectorruimte is. Definieer nu $U \subset V$ als de verzameling van alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(n) = 0$ voor alle positieve gehele getallen n, dus
$$U = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{Z}_{>0} : f(n) = 0\}.$$
Laat zien dat U een deelruimte is van V.

(3) Laat U_1 en U_2 deelruimtes zijn van een vectorruimte V. Bewijs dat de doorsnede $U_1 \cap U_2$ ook een deelruimte van V is.

(4) Waar of niet waar?
Geef een **korte** uitleg (hooguit twee regels).
(a) Zij V de vectorruimte van alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dan is de verzameling
$$\{f \in V \ :\ f(x) \geq 0 \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$$
een lineaire deelruimte.
(b) Zij V de vectorruimte van alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dan is de verzameling
$$\{f \in V \ :\ f(0) = 0 \text{ of } f \text{ is continu}\}$$
een lineaire deelruimte.
(c) Als v_1, v_2, v_3 voortbrengers zijn voor een vectorruimte V dan brengen
$$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1$$
ook V voort.
(d) Voor alle $r, s \in \mathbb{Q}$ is de verzameling
$$W_{r,s} = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{Q}^4 \ :\ x + ry = r^2(z - w) + s\}.$$
een lineaire deelruimte van $\mathbb{Q}^4$ dan en slechts dan als $s = 0$.
(e) Zij V een vectorruimte met deelverzamelingen $S, T \subset V$. Dan geldt
$$L(S \cap T) = L(S) \cap L(T).$$

(5) Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding en $U \subset W$ een deelruimte van W. Laat zien dat $f^{-1}(U)$ een deelruimte van V is.

(6) Zij $s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in het vlak gegeven door $2x - y + 3z = 0$. Bepaal een matrix A zodanig dat voor alle $v \in \mathbb{R}^3$ geldt $s(v) = Av$.

(7) Is de volgende matrix inverteerbaar? Zo ja, bepaal de inverse.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(8) Breng de volgende matrix in row echelon form en bepaal voortbrengers voor de kern.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 5 & 9 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

(9) Gegeven de vectoren

$$v_1 = (1, 2, -1, 3), \qquad v_2 = (3, 2, -2, 0), \qquad v_3 = (2, 0, -1, -3)$$

in $\mathbb{R}^4$. Zij $U \subset \mathbb{R}^4$ de deelruimte voortgebracht door v_1, v_2, en v_3. Bepaal voortbrengers voor $U^\perp \subset \mathbb{R}^4$.