Lineaire algebra I (wiskundigen)

Tentamen, donderdag 22 januari, 2015

Geen rekenmachines, dictaat of aantekeningen. **Motiveer elk antwoord!**

Opgave 1 (9 punten). Voor alle reële getallen $c \in \mathbb{R}$ definiëren we de matrix A_c als

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 1-c & 2 & -2 \\ 2 & -1 & c+2 \end{pmatrix}$$

en we definiëren de afbeelding $g_c \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ door

$$g_c(x) = A_c \cdot x$$

voor alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(a) Voor welke $c \in \mathbb{R}$ is g_c surjectief?

(b) Is A_c inverteerbaar voor $c = -2$? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.

Opgave 2 (9 punten). Zij B de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal alle eigenwaarden van B en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.

(b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix Q zodanig dat geldt

$$D = Q^{-1}BQ.$$

(c) Bereken B^{2015}. In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals 17^{2015} laten staan.

Opgave 3 (7 punten). Beschouw de reële matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geef voortbrengers voor $(\operatorname{im} C)^\perp$.

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

Opgave 4 (12 punten). Zij V de reële vectorruimte van alle 3×3 magische vierkanten zoals we tijdens het college meerdere malen gezien hebben[1]. De magische vierkanten

$$M_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}\,, \qquad M_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \text{en} \qquad M_3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

vormen een basis $B = (M_1, M_2, M_3)$ voor V. [Je mag dit zonder bewijs gebruiken.]
Zij $\rho\colon V \to V$ de lineaire afbeelding die elk magisch vierkant roteert over 90°, dus ρ stuurt

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & j \\ \hline \end{array} \qquad \text{naar} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline c & f & j \\ \hline b & e & h \\ \hline a & d & g \\ \hline \end{array}\,.$$

Zij $\gamma\colon V \to V$ de lineaire afbeelding die het magisch vierkant

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & j \\ \hline \end{array} \qquad \text{stuurt naar} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline e & e & e \\ \hline e & e & e \\ \hline e & e & e \\ \hline \end{array}$$

en definieer $\sigma = \rho + \gamma$.

(a) Geef de matrices $[\rho]_B^B$, $[\gamma]_B^B$ en $[\sigma]_B^B$.
(b) Bepaal de karakteristieke polynomen van ρ, γ en σ.
(c) Bepaal een niet-nul eigenvector voor elk van de afbeeldingen ρ, γ en σ.
(d) Bepaal de rangen van ρ, γ en σ.
(e) Is σ diagonaliseerbaar?

Opgave 5 (8 punten). Stel V en W zijn eindig-dimensionale reële vectorruimtes. Neem aan dat

$$f\colon V \to W \qquad \text{en} \qquad g\colon W \to V$$

lineaire afbeeldingen zijn zodanig dat de samenstelling $g \circ f$ gelijk is aan de identiteit id_V op V, dus voor alle $v \in V$ geldt $g(f(v)) = v$. Bewijs dat het beeld van f (d.w.z. $\operatorname{im} f$) en de kern van g (d.w.z. $\ker g$) complementaire ruimtes in W zijn.

[1] Dus V bestaat uit alle vierkanten van 3×3 reële getallen waarvan de drie rijen, de drie kolommen en de twee diagonalen allemaal dezelfde som hebben; de scalaire vermenigvuldiging en de optelling is componentsgewijs gedefinieerd.