Lineaire algebra I (wiskundigen)

Toets, donderdag 23 oktober, 2014

(1) Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak

$$V = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - 3y + z = 1 \,\}.$$

Bepaal de afstand van het punt $q = (-6, 5, 0) \in \mathbb{R}^3$ tot het vlak V.

Oplossing. Het vlak V gaat niet door 0, dus eerst kiezen we een punt in V, zeg $p = (0, 0, 1)$. We transleren q en V door van alle punten p af te trekken. We krijgen dan $q' = q - p = (-6, 5, -1)$ en een vlak V' dat 0 bevat. De normaal $a = (2, -3, 1)$ voor V is ook een normaal voor V', dus we krijgen $V' = a^\perp$. De orthogonale projectie van q' op a (of $L(a)$) is gelijk aan λa met

$$\lambda = \frac{\langle a, q' \rangle}{\langle a, a \rangle} = \frac{2 \cdot (-6) + (-3) \cdot 5 + 1 \cdot (-1)}{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \frac{-28}{14} = -2.$$

De afstand $d(q, V) = d(q', V')$ is dan gelijk aan

$$\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\| = 2\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = 2\sqrt{14}.$$

(2) Bepaal voortbrengers voor de kern van de volgende matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Oplossing. We brengen de matrix eerst in *reduced row echelon form*. We beschrijven hier telkens een paar stappen rij-operaties tegelijk.

$$A \rightsquigarrow \begin{array}{r} R_2 \\ R_1 - 2R_2 \\ R_3 - 2R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{r} R_1 \\ \frac{1}{3}R_2 \\ \frac{1}{5}R_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{r} R_1 + R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

De kern van A is gelijk aan de kern van A'. Stel $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker A'$. De laatste twee kolommen van A' bevatten geen pivot, dus de laatste twee coördinaten mogen we vrij kiezen, zeg $x_3 = s$ en $x_4 = t$. Dan volgen de coordinaten x_2 en x_1 (in die volgorde) uit de vergelijkingen $\langle v_2, x \rangle = 0$ en $\langle v_1, x \rangle = 0$ (in die volgorde), waarbij v_i de i-de rij van A' is. Uit

$$0 = \langle v_2, x \rangle = x_2 - 2x_3 - 2x_4 \qquad \text{volgt} \qquad x_2 = 2x_3 + 2x_4 = 2s + 2t.$$

En uit

$$0 = \langle v_1, x \rangle = x_1 + 2x_3 + 3x_4 \qquad \text{volgt} \qquad x_1 = -2x_3 - 3x_4 = -2s - 3t.$$

We vinden dus

$$x = (-2s - 3t, 2s + 2t, s, t) = s(-2, 2, 1, 0) + t(-3, 2, 0, 1).$$

De kern van A wordt dus voortgebracht door de twee vectoren

$$(-2, 2, 1, 0) \qquad \text{en} \qquad (-3, 2, 0, 1).$$

(3) Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \\ -1/9 & -8/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat er geldt $A^4 = I_3$, waarbij I_3 de 3×3 identiteitsmatrix is.
(b) De afbeelding $r\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die $x \in \mathbb{R}^3$ stuurt naar $A \cdot x$ is een rotatie om een lijn L door de oorsprong 0. Bepaal deze lijn L. Dat wil zeggen, geef een voortbrenger van L.

Oplossing. (a) Om de berekening iets makkelijker te maken schrijven we $A = \frac{1}{9}B$ met

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -7 \\ 8 & 1 & 4 \\ -1 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

We gebruiken $A^4 = (A^2)^2$, dus we rekenen eerst $A^2 = \frac{1}{81}B^2$ uit. Er geldt

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 4 & -4 & -7 \\ 8 & 1 & 4 \\ -1 & -8 & 4 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 4\cdot 4 + (-4)\cdot 8 + (-7)\cdot(-1) & 4\cdot(-4) + (-4)\cdot 1 + (-7)\cdot(-8) & 4\cdot(-7) + (-4)\cdot 4 + (-7)\cdot 4 \\ 8\cdot 4 + 1\cdot 8 + 4\cdot(-1) & 8\cdot(-4) + 1\cdot 1 + 4\cdot(-8) & 8\cdot(-7) + 1\cdot 4 + 4\cdot 4 \\ (-1)\cdot 4 + (-8)\cdot 8 + 4\cdot(-1) & (-1)\cdot(-4) + (-8)\cdot 1 + 4\cdot(-8) & (-1)\cdot(-7) + (-8)\cdot 4 + 4\cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & 36 & -72 \\ 36 & -63 & -36 \\ -72 & -36 & -9 \end{pmatrix} = 9C \end{aligned}$$

met

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dus geldt $A^2 = \frac{1}{81}B^2 = \frac{1}{9}C$. Dit betekent $A^4 = (A^2)^2 = \frac{1}{81}C^2$. Net als voor B hierboven rekenen we uit dat er geldt

$$C^2 = \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

(Omdat C symmetrisch is om de hoofddiagonaal, is C^2 dat ook, dus we kunnen hier wat rekenwerk uitsparen.) Dit betekent $A^2 = \frac{1}{81}C^2 = I_3$.

(b) Voor de rotatie r geldt wegens deel (a) dat $r^4 = r \circ r \circ r \circ r$ de identiteit is, dus r is een rotatie om $90°$ (of, a priori, om $180°$ of $360°$, maar dat is beide niet het geval, want $A^2 \neq I_3$). We zoeken een vector $a \in \mathbb{R}^3$ zodanig dat $L = L(a)$. Dit geldt voor elk niet-nul element van L. Merk nu op dat een vector x op de lijn L ligt dan en slechts dan als $r(x) = x$. We zoeken dus een vector die op zichzelf wordt afgebeeld. Die kunnen we op meerdere manieren vinden.

Methode 1 (naïef). Schrijf $x = (x_1, x_2, x_3)$ en $(y_1, y_2, y_3) = Ax$ (met de y_i dus uitgedrukt in de x_j). Dan krijgen we een stelsel van drie vergelijkingen $y_i = x_i$ dat je op kunt lossen. Die berekeningen worden vergemakkelijkt in de volgende methode.

Methode 2. De vergelijking $Ax = x$ is equivalent met $Ax = I_3 x$ en dus met $x \in \ker(A - I_3)$. We zoeken dus een element in de kern van $A - I_3$ of van $D = 9(A - I_3) = B - 9I_3$. Er geldt

$$D = B - 9I_3 = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -7 \\ 8 & -8 & 4 \\ -1 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Brengen we die in *reduced row echelon form*, dan krijgen we

$$D \rightsquigarrow \begin{array}{r} R_3 \\ R_1 - 5R_3 \\ \frac{1}{4}R_2 + 2R_1 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -8 & -5 \\ 0 & 36 & 18 \\ 0 & -18 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{r} R_1 \\ \frac{1}{18}R_2 \\ \frac{1}{9}R_3 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -8 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{r} R_1 + 4R_2 \\ \frac{1}{2}R_2 \\ R_3 + R_2 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D'$$

De lijn L is gelijk aan de kern van D en dus aan de kern van D'. Die kern wordt voortgebracht door een element $x = (x_1, x_2, x_3)$ waarbij we x_3 vrij mogen kiezen aan 1 (want de derde kolom bevat geen pivot) en de andere coördinaten volgen uit het feit dat het inproduct van x met de rijen van D' nul moet zijn. Wegens de tweede rij krijgen we $x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0$, dus $x_2 = -\frac{1}{2}$. Wegens de eerste rij krijgen we $-x_1 - x_3 = 0$, dus $x_1 = -x_3 = -1$. Een voortbrenger voor L is dus $x = (-1, -\frac{1}{2}, 1)$. Omdat L ook wordt voortgebracht door elk veelvoud van x, kunnen we ook de noemers verwijderen door met 2 te vermenigvuldigen. De lijn L wordt dus ook voortgebracht door $a = -2x = (2, 1, -2)$.

Een goede check is nu natuurlijk te kijken of er inderdaad geldt $A \cdot a = a$!

Methode 3 (slim). De rotatie $r^2 = r \circ r$ draait $\mathbb{R}^3$ om L over 180°. Elk punt $p \in \mathbb{R}^3$ heeft dus een beeld $r^2(p)$ dat precies aan de andere kant van de lijn L ligt. Het middelpunt $\frac{1}{2}(p + r^2(p))$ ligt dus op de lijn, en de som $p + r^2(p) = p + A^2p$ dus ook. Om noemers te vermijden nemen we bijvoorbeeld $p = 9e_1 = (9, 0, 0)$. Er geldt $r^2(p) = A^2p = \frac{1}{9}C \cdot (9e_1) = Ce_1 = (-1, 4, -8)$ (namelijk de eerste kolom van C). De som $p + r^2(p)$ is dus $(9, 0, 0) + (-1, 4, -8) = (8, 4, -8)$. Dat is dus een voortbrenger van L. Inderdaad, dit is gelijk aan $4a$ met a uit de vorige methode. (Voor sommige keuzes van p kan de som $p + r^2(p)$ toevallig gelijk zijn aan 0. Dan moet je een nieuw punt kiezen.)

(4) Zij W een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Stel U_1, U_2, V_1, V_2 zijn deelruimtes van W en neem aan dat er geldt:
(i) $U_1 \subset V_1$ en $U_2 \subset V_2$,
(ii) $U_1 + U_2 = W$ en
(iii) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
Bewijs dat er geldt $U_1 = V_1$ en $U_2 = V_2$.

Oplossing. Omdat de inclusies in (i) al gegeven zijn is het voldoende om te bewijzen dat er geldt $V_1 \subset U_1$ en $V_2 \subset U_2$. Wegens symmetrie (verwisselen van de indices 1 en 2) is het voldoende om te bewijzen dat er geldt $V_1 \subset U_1$. We geven weer twee oplossingen.

Methode 1. Kies een element $v \in V_1$. Wegens (ii) zijn er elementen $u_1 \in U_1$ en $u_2 \in U_2$ met $v = u_1 + u_2$. Dan geldt ook $u_1 \in V_1$ en $u_2 \in V_2$ wegens (i). Er geldt dus

$$V_1 \ni v - u_1 = u_2 \in V_2.$$

Het element $v - u_1 = u_2$ zit dus in $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, dus $v - u_1 = 0$, dus $v = u_1 \in V_1$. Hieruit volgt $V_1 \subset U_1$, dus zijn we klaar.

Methode 2. We bewijzen eerst dat V_1 en V_2 complementaire ruimtes zijn. Wegens (i) en (ii) geldt $W = U_1 + U_2 = L(U_1 \cup U_2) = L(V_1 \cup V_2) = V_1 + V_2 \subset W$. Omdat de eerste en laatste deelruimtes gelijk zijn, zijn alle deelruimtes dus gelijk, dus $V_1 + V_2 = W$. Samen met (iii) volgt dat V_1 en V_2 complementaire deelruimtes zijn. Dat betekent dat elk element van W op een **unieke** manier te schrijven is als de som van een element uit V_1 en een element uit V_2. Zij nu $v \in V_1$ een element. Dan is die wegens (ii) te schrijven als $v = u_1 + u_2$ met $u_1 \in U_1 \subset V_1$ en $u_2 \in U_2 \subset V_2$. Maar we kunnen v ook schrijven als $v = v + 0$ met $v \in V_1$ en $0 \in V_2$. Omdat v op een **unieke** manier te schrijven is als de som van een element uit V_1 en een element uit V_2, volgt dus $u_1 = v$ en $u_2 = 0$. In het bijzonder geldt $v = u_1 \in U_1$. Hieruit volgt $V_1 \subset U_1$, dus zijn we klaar.

Waarschuwing: Veel mensen dachten dat $U_1 + U_2 = W$ impliceert dat elk element van W bevat is in U_1 of in U_2, maar dat is niet het geval. Voor elke twee verschillende lijnen L_1 en L_2 door de oorsprong in $\mathbb{R}^2$ geldt bijvoorbeeld wel $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^2$, maar niet $L_1 \cup L_2 = \mathbb{R}^2$.