Mathematisch Instituut – Universiteit Leiden

Hertentamen Lineaire Algebra 1, 15 maart 2012, 14:00 – 17:00

Motiveer steeds je antwoord. Rekenmachine en dictaat zijn niet toegestaan. Er zijn in totaal 50 punten te halen.

Opgave 1 (8pt)**.**

(a) Geef een vergelijking voor het vlak $V \subset \mathbf{R}^3$ dat geparametriseerd wordt door

$$V = \{\lambda(1,2,3) + \mu(-3,-2,-1) + (1,0,1) \in \mathbf{R}^3 : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

(b) Bereken de afstand van het punt $(1,2,1) \in \mathbf{R}^3$ tot het vlak $W \subset \mathbf{R}^3$ gegeven door $3x - 2y + 4z = 0$.

Opgave 2 (10pt)**.** Voor alle reële getallen a wordt de afbeelding $C_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} a+2 & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Voor welke waardes van a is C_a inverteerbaar?
(b) Reken de inverse van C_{-1} uit.
(c) Geef een basis voor de kern en het beeld van C_{-2}.

Opgave 3 (10pt)**.** Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal alle eigenwaardes van A en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
(b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zodanig dat geldt $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
(c) Bereken A^{2013}. In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals 3^{2013} laten staan.

Opgave 4 (8pt)**.** Zij $U_1 \subset \mathbf{R}^3$ het vlak opgespannen door de vectoren $(1,2,3)$ en $(1,1,1)$. Zij $U_2 \subset \mathbf{R}^3$ het vlak opgespannen door $(0,1,5)$ en $(-3,4,-2)$. Bepaal een basis voor de doorsnede $U_1 \cap U_2$.

Opgave 5 (4pt)**.** Zij $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ een injectieve lineaire afbeelding. Zij $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ een lineaire afbeelding. Laat zien dat $\operatorname{im} f \cap \ker g \neq 0$.

Opgave 6 (5pt)**.** Zij $n, m \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ en zij $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een lineaire afbeelding zodanig dat $A^m = A \circ \ldots \circ A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de identiteit is. Laat $\lambda \in \mathbf{R}$ een eigenwaarde van A zijn. Laat zien dat $\lambda \in \{-1, 1\}$.

z.o.z.

Opgave 7 (5pt)**.** Zij $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een lineaire afbeelding zijn van rang 1. Bewijs dat er een basis $\mathfrak{B}$ van $\mathbf{R}^n$ en $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ zijn zodanig dat

$$[A]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Bewijs dat er een basis $\mathfrak{C}$ van $\mathbf{R}^n$ en $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}$ zijn zodanig dat

$$[A]_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$