Tentamen Lineaire Algebra 1 (Wiskundigen)

Donderdag, 23 december 2010, 14.00-17.00

Geen rekenmachines. Motiveer elk antwoord.

1. (12pt) Voor alle reële getallen a en b definiëren we de matrix C_a en de vector v_b door

$$C_a = \begin{pmatrix} a & a & 2 \\ 1 & 0 & a \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad v_b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}.$$

   (a) Bepaal voor alle reële waarden van a de rang van de matrix C_a.

   (b) Is C_a inverteerbaar voor $a = 2$? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.

   (c) Voor welke paren (a, b) heeft de vergelijking $C_a x = v_b$ meer dan één oplossing x in $\mathbb{R}^3$?

   (d) Beschrijf de volledige oplossingsverzameling voor het paar uit opgave (c) met de kleinste waarde van a.

2. (8pt) Zij $L \subset \mathbb{R}^3$ de lijn door de punten $(1, 0, 1)$ en $(0, 1, 1)$.

   (a) Bereken de afstand van het punt $P = (-1, 1, 2)$ tot L.

   (b) Geef een vergelijking voor het vlak $V \subset \mathbb{R}^3$ dat loodrecht staat op L en het punt P bevat.

3. (7pt) De verzameling $\mathbb{C}$ van complexe getallen is een vectorruimte over de reële getallen $\mathbb{R}$, met de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging (dit hoef je niet te bewijzen).

   (a) Geef een basis voor $\mathbb{C}$ als vectorruimte over $\mathbb{R}$.

   (b) Zij $q = a + ib$ een vast complex getal, met $a, b \in \mathbb{R}$. Definieer de afbeelding $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto qz$. Laat zien dat T lineair is.

   (c) Laat zien dat de determinant van T gelijk is aan $q\overline{q}$, waarbij $\overline{q} = a - ib$ de complex geconjugeerde van q is.

4. (5pt) Zij $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in het vlak V gegeven door

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

   Wat is de determinant van S?

Op de volgende pagina staan meer opgaven.

5. (6pt) (a) Zij V het hypervlak in $\mathbb{R}^{2010}$ gegeven door

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \cdots + 2009x_{2009} + 2010x_{2010} = 0.$$

Bepaal voortbrengers voor een complementaire ruimte van V in $\mathbb{R}^{2010}$.

(b) Zij $F = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ het lichaam van twee elementen, met $1 + 1 = 0$. Zij W het hypervlak in F^{2010} gegeven door

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{2009} + x_{2010} = 0.$$

Bepaal voortbrengers voor een complementaire ruimte van W in F^{2010}.

6. (10pt) (a) Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte van dimensie n met twee deelruimtes U en U' waarvoor geldt $\dim U + \dim U' = n$. Laat zien dat dan de equivalentie

$$U \cap U' = \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad U + U' = V$$

geldt.

(b) Zij nu $f \colon V \to V$ een lineaire afbeelding en $f^2 = f \circ f$ de samenstelling van f met zichzelf. Laat zien dat de kern $\ker f$ en het beeld $\mathrm{im} f$ van f complementaire ruimtes in V zijn dan en slechts dan als f en f^2 dezelfde rang hebben.

[Hint: beschouw de beperking $f' \colon \mathrm{im} f \to V$ van f tot $\mathrm{im} f$ en gebruik de gelijkheid $\mathrm{im}(f^2) = \mathrm{im} f'$.]

7. (8pt) WAAR of ONWAAR? Geef een **korte** uitleg als het WAAR is en een tegenvoorbeeld als het ONWAAR is. Vergeet niet te vermelden of het WAAR of ONWAAR is!

(a) Voor alle lineaire deelruimtes $U, V, W \subset \mathbb{R}^3$ geldt

$$U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W).$$

(b) Voor alle vectorruimtes V en W met lineaire afbeeldingen $f \colon V \to W$ en $g \colon W \to V$ die voldoen aan $g \circ f = \mathrm{id}_V$, geldt $\dim V \leq \dim W$.

(c) Voor alle vectorruimtes V en W met lineaire afbeeldingen $f \colon V \to W$ en $g \colon W \to V$ die voldoen aan $g \circ f = \mathrm{id}_V$, geldt $\dim V \geq \dim W$.

(d) Voor elke twee vierkante matrices A en B met $AB = 0$ geldt ook $BA = 0$.