Lineaire algebra I (wiskundigen)

Toets, donderdag 22 oktober, 2009

Oplossingen

(1) Zij V het vlak in $\mathbb{R}^3$ door de punten
$$P_1 = (1,2,1), \quad P_2 = (0,1,1) \quad \text{en} \quad P_3 = (-1,1,3).$$

(a) Geef een parametrisatie voor V. Dat wil zeggen, vind vectoren p, v_1, v_2 zodanig dat geldt
$$V = \{p + sv_1 + tv_2 \ : \ s, t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Geef een vergelijking voor V.

(c) Bepaal de afstand van het punt $Q = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ tot het vlak gegeven door
$$x + 2y - 3z = 1.$$

(d) Bepaal de hoek tussen de vectoren $(1,2,3,4)$ en $(4,3,2,1)$ in $\mathbb{R}^4$.

Oplossing:

(a) De parametrisatie van V heeft de vorm
$$V = \{p + sv_1 + tv_2 : s, t \in \mathbb{R}\},$$
met $p \in \mathbb{R}^3$ een punt in het vlak en $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ twee onafhankelijke vectoren over het vlak (die hebben dus begin- en eindpunt in V). Een punt in het vlak is bijvoorbeeld
$$p = P_1 = (1,2,1).$$
Twee vectoren met begin- en eindpunt in het vlak kunnen we met P_1, P_2 en P_3 maken door
$$v_1 = P_2 - P_1 = (0,1,1) - (1,2,1) = (-1,-1,0),$$
$$v_2 = P_3 - P_1 = (-1,1,3) - (1,2,1) = (-2,-1,2).$$
Dat deze vectoren lineair onafhankelijk zijn zien we direct, want geen van de twee is een veelvoud van de ander. [Als v_1 en v_2 lineair *afhankelijk* waren geweest, dan hadden P_1, P_2 en P_3 op één lijn gelegen en geen vlak beschreven.] Een parametrisatie van V is dus
$$V = \{(1,2,1) + s(-1,-1,0) + t(-2,-1,2) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Om een vergelijking op te stellen zoeken we eerst een normaalvector $n = (n_1, n_2, n_3)$ van V. Deze normaalvector moet loodrecht staan op v_1 en v_2, dit zijn immers vectoren over het vlak. Er moet dus gelden
$$\langle n, v_1 \rangle = -n_1 - n_2 = 0 \qquad \text{en} \qquad \langle n, v_2 \rangle = -2n_1 - n_2 + 2n_3 = 0.$$
We zien dat $n = (2,-2,1)$ hieraan voldoet. [Een andere manier om een normaalvector te vinden is met het uitproduct $v_1 \times v_2$.] Voor $v \in V$ geldt nu $\langle n, v \rangle = \langle n, p \rangle$, met p weer een punt in het vlak. We kunnen bijvoorbeeld $p = P_1$ nemen. Dan is
$$\langle n, v \rangle = \langle n, p \rangle = \langle (2,-2,1), (1,2,1) \rangle = -1.$$
Schrijf $v = (x, y, z)$, dan vinden we voor V de vergelijking
$$2x - 2y + z = -1.$$

(c) Een normaalvector van het gegeven vlak is $n = (1, 2, -3)$. [Dit zijn de coëfficiënten van respectievelijk x, y en z in de vergelijking.] Een punt in het vlak is bijvoorbeeld $P = (1, 0, 0)$. De afstand van Q tot het vlak is de lengte van de loodrechte projectie van $Q - P$ op de normaalvector n. Deze projectie is

$$\frac{\langle Q - P, n\rangle}{\langle n, n\rangle} n.$$

De lengte hiervan is

$$\begin{aligned} \frac{|\langle Q - P, n\rangle|}{\|n\|^2}\|n\| &= \frac{|\langle Q - P, n\rangle|}{\|n\|} \\ &= \frac{|\langle (0, 2, 1), (1, 2, -3)\rangle|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \tfrac{1}{14}\sqrt{14}. \end{aligned}$$

(d) De hoek θ tussen $(1, 2, 3, 4)$ en $(4, 3, 2, 1)$ is gedefiniëerd door

$$\cos\theta = \frac{\langle (1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1)\rangle}{\|(1, 2, 3, 4)\| \cdot \|(4, 3, 2, 1)\|} = \frac{20}{\sqrt{30}\sqrt{30}} = \tfrac{20}{30} = \tfrac{2}{3},$$

dus $\theta = \cos^{-1}(\frac{2}{3})$. [Omdat dit geen mooie oplossing heeft, hoeft het niet anders geschreven te worden.]

(2) Laat zien dat de vectoren

$$v_1 = (1, -1, 2, 0), \quad v_2 = (1, -1, -2, 0), \quad v_3 = (3, -2, 1, 4)$$

in $\mathbb{R}^4$ lineair onafhankelijk zijn en breid het rijtje (v_1, v_2, v_3) uit tot een basis voor $\mathbb{R}^4$.

Oplossing:

Eerste oplossing. De vectoren v_1, v_2 en v_3 zijn lineair onafhankelijk als voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt: uit $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ volgt $a = b = c = 0$. Stel dus dat we $a, b, c \in \mathbb{R}$ hebben zodat $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. In deze vergelijking staan links en rechts vectoren in $\mathbb{R}^4$. Als we dit per component bekijken, krijgen we vier vergelijkingen in reële getallen:

$$\begin{aligned} a + b + 3c &= 0, && \text{(A)} \\ -a - b - 2c &= 0, && \text{(B)} \\ 2a - 2b + c &= 0, && \text{(C)} \\ 4c &= 0. && \text{(D)} \end{aligned}$$

Uit vergelijking (D) volgt $c = 0$. Als we dat invullen in (C), krijgen we $a = b$. Als we dat allemaal invullen in (B), vinden we $a = 0$ en dus ook $b = 0$. Dit bewijst dat v_1, v_2 en v_3 lineair onafhankelijk zijn.

Voor een basis voor $\mathbb{R}^4$ hebben we vier lineair onafhankelijke vectoren nodig. Volgens de basisuitbreidingsstelling (stelling 6.9 in het dictaat) kunnen we (v_1, v_2, v_3) uitbreiden tot een basis door een geschikte vector van de basis ($(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ $(0, 0, 0, 1)$) toe te voegen. We proberen als eerste $(1, 0, 0, 0)$. Noem deze vector v_4. We gaan bewijzen dat v_1, v_2, v_3 en v_4 lineair onafhankelijk zijn in $\mathbb{R}^4$. Stel dat voor zekere

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ geldt: $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0$. We bekijken dit weer per component:

$$\text{(A')} \qquad a + b + 3c + d = 0,$$
$$\text{(B')} \qquad -a - b - 2c = 0,$$
$$\text{(C')} \qquad 2a - 2b + c = 0,$$
$$\text{(D')} \qquad 4c = 0.$$

Merk op dat (B'), (C') en (D') dezelfde vergelijkingen zijn als (B), (C) en (D). Omdat we hierboven (A) niet gebruikt hebben om af te leiden dat $a = b = c = 0$, kunnen we ook uit dit nieuwe stelsel direct concluderen dat $a = b = c = 0$. Als we dit vervolgens invullen in (A'), zien we dat ook $d = 0$. Dus de vier vectoren zijn lineair onafhankelijk en vormen daarom een basis voor $\mathbb{R}^4$.

Opmerking: de keuze voor $(1, 0, 0, 0)$ *als vierde vector is hier niet willekeurig: juist omdat we in het eerste stuk vergelijking (A) niet gebruikt hebben, is dit een handige keuze en zij we bij het tweede deel een stuk sneller klaar.*

Tweede oplossing. We laten op dezelfde manier als in de eerste oplossing zien dat v_1, v_2 en v_3 lineair onafhankelijk zijn. We weten nu dat deze drie vectoren een deelruimte van dimensie 3 in $\mathbb{R}^4$ opspannen. Zo'n deelruimte kunnen we ook geven door één lineaire vergelijking, d.w.z. er zijn $a, b, c, d \in R$ zodat deze deelruimte gelijk is aan

$$\{ (x, y, z, w) \mid ax + by + cz + dw = 0 \}.$$

Deze a, b, c, d moeten we nog bepalen en wel op zo'n manier dat v_1, v_2 en v_3 aan de vergelijking voldoen. Merk op dat we, onafhankelijk van a, b, c altijd d zo kunnen kiezen dat v_3 aan de vergelijking voldoet, omdat de vierde component van v_1 en v_2 nul is. Omdat de eerste twee componenten van v_1 en v_2 gelijk zijn, zien we direct dat beide vectoren voldoen aan $x + y = 0$. We kiezen dus $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ en $d = -\frac{1}{4}$. Kortom, de vectorruimte opgespannen door v_1, v_2 en v_3 wordt gegeven door

$$\{ (x, y, z, w) \mid x + y - \tfrac{1}{4}w = 0 \}.$$

Om (v_1, v_2, v_3) tot een basis voor $\mathbb{R}^4$ uit te breiden, hebben we nu één vector nodig die niet in deze deelruimte zit. Bijvoorbeeld $(1, 0, 0, 0)$: deze voldoet niet aan $x + y - \frac{1}{4}w = 0$. Dus $(\ v_1, v_2, v_3, (1, 0, 0, 0)\ )$ is een basis voor $\mathbb{R}^4$.

Opmerking: er zijn nog veel meer vectoren die we als vierde basisvector hadden kunnen kiezen. In het bijzonder zien we aan de vergelijking direct dat van de vier eenheidsbasisvectoren alleen $(0, 0, 1, 0)$ *niet voldoet.*

(3) Gegeven een vectorruimte V en twee lineaire deelruimtes U_1 en U_2 van V. Bewijs dat de doorsnede $U_1 \cap U_2$ weer een lineaire deelruimte is.

Oplossing: Dit is Lemma 5.6 uit het dictaat. Er zijn drie eisen te checken:

- Eis 1: "Er geldt $0 \in U_1 \cap U_2$." Dit geldt inderdaad, want we hebben $0 \in U_1$ en $0 \in U_2$ omdat U_1 en U_2 beide zelf deelruimtes zijn.
- Eis 2: "Voor alle $x, y \in U_1 \cap U_2$ geldt $x + y \in U_1 \cap U_2$." Stel $x, y \in U_1 \cap U_2$. Dan geldt $x, y \in U_1$ en $x, y \in U_2$ en omdat U_1 en U_2 beide

deelruimtes zijn, volgt ook $x + y \in U_1$ en $x + y \in U_2$. Hieruit volgt $x + y \in U_1 \cap U_2$, dus aan eis 2 is ook voldaan.

- Eis 3: "Voor alle $x \in U_1 \cap U_2$ en alle $\lambda \in F$ geldt $\lambda x \in U_1 \cap U_2$," waarbij F het lichaam is waarover V een vectorruimte is. Stel $\lambda \in F$ en $x \in U_1 \cap U_2$. Dan geldt $x \in U_1$ en $x \in U_2$. Omdat U_1 en U_2 beide deelruimtes zijn, volgt ook $\lambda x \in U_1$ en $\lambda x \in U_2$. Hieruit volgt $\lambda x \in U_1 \cap U_2$, dus aan eis 3 is ook voldaan.

(4) Gegeven een vectorruimte V en complementaire lineaire deelruimtes U_1 en U_2 van V. Met andere woorden, er geldt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ en $U_1 + U_2 = V$. Laat zien dat er voor elke $v \in V$ *unieke* vectoren $u_1 \in U_1$ en $u_2 \in U_2$ zijn zodanig dat $v = u_1 + u_2$.
Oplossing: Dit is deel (2) van Lemma 6.25 uit het dictaat. Omdat er geldt $V = U_1 + U_2$ zijn er voor elke $v \in V$ elementen $u_1 \in U_1$ en $u_2 \in U_2$ met $v = u_1 + u_2$. Stel er zijn nog twee elementen $u_1' \in U_1$ en $u_2' \in U_2$ met $v = u_1' + u_2'$. Dan geldt $u_1 + u_2 = v = u_1' + u_2'$, en dus $u_1 - u_1' = u_2' - u_2$. Omdat er geldt $u_1 - u_1' \in U_1$ en $u_2' - u_2 \in U_2$, volgt $u_1 - u_1' = u_2' - u_2 \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$, wat betekent dat $u_1 - u_1' = u_2' - u_2 = 0$. Hieruit volgt $u_1' = u_1$ en $u_2' = u_2$, dus zijn u_1 en u_2 inderdaad uniek.

(5) Waar of niet waar?
Geef een tegenvoorbeeld of schets een **korte** uitleg (hooguit twee regels).

(a) Zij V de vectorruimte van alle functies $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dan is de verzameling

$$\{f \in V \ : \ f(x) \geq 0 \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$$

een lineaire deelruimte.

(b) Als (v_1, v_2, v_3) een basis is voor een vectorruimte V dan is

$$(v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1)$$

dat ook.

(c) Als voor twee lineaire deelruimtes U en V van $\mathbb{R}^9$ geldt

$$\dim U = \dim V = 5,$$

dan bevat $U \cap V$ een vector $v \neq 0$.

(d) In de vectorruimte van alle polynomen over $\mathbb{Q}$ zijn de zes polynomen

$$\begin{aligned}
&x + 1, \\
&x - 2, \\
&x^2 - 3x + 2, \\
&x^3 - x, \\
&x^3 + x^2 + x - 3, \\
&x^4 + x^2 + 1
\end{aligned}$$

lineair afhankelijk.

(e) Voor alle $r, s \in \mathbb{Q}$ is de verzameling

$$W_{r,s} = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{Q}^4 \; : \; x + ry = r^2(z - w) + s\}.$$

een lineaire deelruimte van $\mathbb{Q}^4$ dan en slechts dan als $s = 0$.

Oplossing:

(a) Niet waar. De functie f gedefinieerd door $f(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, is een element van de verzameling, maar $-1 \cdot f$ is geen element van de verzameling. De verzameling is dus niet gesloten onder scalaire vermenigvuldiging.

(b) Niet waar. Voor alle drietallen vectoren (v_1, v_2, v_3) geldt

$$(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_1) = 0,$$

en dat is een niet-triviale lineaire combinatie van $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$ en $v_3 - v_1$ die nul oplevert. De drie vectoren zijn dus niet lineair onafhankelijk.

(c) Waar. Door stelling 6.22 toe te passen, zien we dat

$$\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = 5 + 5 = 10.$$

Verder is $U + V$ een deelruimte van $\mathbb{R}^9$, dus $\dim(U + V) \leq 9$. Hieruit volgt $\dim(U \cap V) \geq 1$. Een deelruimte van dimensie 1 bevat altijd een vector ongelijk aan 0.

(d) Waar. De genoemde zes polynomen zitten allemaal in de deelruimte van polynomen over $\mathbb{Q}$ van graad hoogstens 4. Deze deelruimte heeft dimensie 5 en dus zijn elke zes vectoren in deze ruimte lineair afhankelijk.

(e) Waar. Stel dat $W_{r,s}$ een lineaire deelruimte is. Dan is 0 een element van $W_{r,s}$, dus $0 + r \cdot 0 = r^2 \cdot (0 - 0) + s$, waaruit volgt $s = 0$. Stel andersom dat $s = 0$. Dan is gemakkelijk na te gaan dat aan alle axioma's voor een lineaire deelruimte voldaan zijn.