Duale afbeeldingen en getransponeerde matrices

Hieronder staat een samenvatting van een deel van het college Lineaire Algebra 2 van 15 oktober. De laatste regels maken het bewijs af.

Zij F een lichaam en V een vectorruimte over F. Dan is $V^* = \mathrm{Hom}(V, F)$ de duale van V. Elementen van V^* heten *lineaire functionalen* of *lineaire vormen*.

Voor elke lineaire afbeelding $f\colon V \to W$ van vectorruimtes over F krijgen we een geïnduceerde lineaire afbeelding $f^\top\colon W^* \to V^*$ gegeven door $f^\top(\varphi) = \varphi \circ f$.

Nu gaan we kijken naar een speciaal geval. Zij n een niet-negatief geheel getal. Zij $p_i\colon F^n \to F$ de projectie op de i-de coördinaat, dus

$$p_i\big((x_1, \ldots, x_n)\big) = x_i.$$

Dan is p_i een lineaire afbeelding en dus $p_i \in (F^n)^*$. We hebben gezien dat de rij $P_n = (p_1, \ldots, p_n)$ een basis is voor de duale vectorruimte $(F^n)^* = \mathrm{Hom}(F^n, F)$. We krijgen dus een isomorfisme

$$\Phi_{P_n}\colon F^n \to (F^n)^*, \quad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1p_1 + \cdots + a_np_n.$$

Voor het gemak schrijven we nu Φ_n in plaats van Φ_{P_n}. Voor elke $a = (a_1, \ldots, a_n) \in F^n$ en $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ stuurt de lineaire afbeelding $\Phi_n(a)$ het element x naar

$$a_1p_1(x) + \cdots + a_np_n(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \langle a, x\rangle.$$

We hadden Φ_n dus ook kunnen definiëren door $\Phi_n(a) = \langle \_\,, a\rangle$.

Zij nu m ook een niet-negatief geheel getal. Op dezelfde manier hebben we een isomorfisme

$$\Phi_m\colon F^m \to (F^m)^*, \qquad a \mapsto \langle \_\,, a\rangle.$$

Stelling 1. *Zij $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, F)$ een matrix en $f_A\colon F^n \to F^m$ de bijbehorende afbeelding. Dan is de matrix $[f_A^\top]_{P_n}^{P_m}$ geassocieerd aan $f_A^\top\colon (F^m)^* \to (F^n)^*$ ten opzichte van de bases P_m en P_n gelijk aan de getransponeerde $A^\top$ van A.*

Proof. Zij B de matrix $[f_A^\top]_{P_n}^{P_m}$. Omdat de dimensies van de duale ruimtes gelijk zijn aan $\dim(F^m)^* = m$ en $\dim(F^n)^* = n$, is B een $n \times m$ matrix. Als we F_m via het isomorfisme Φ_m identificeren met $(F^m)^*$ en F_n via het isomorfisme Φ_n met $(F^n)^*$, dan komt de afbeelding $f_A^\top\colon (F^m)^* \to (F^n)^*$ overeen met $f_B\colon F^m \to F^n$ (per definitie van B).

Met andere woorden, de afbeelding $f_B\colon F^m \to F^n$ past in het volgende diagram.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F^m, F) \arrow[r, "f_A^\top"] & \mathrm{Hom}(F^n, F) \\
F^m \arrow[u, "\Phi_m"] \arrow[r, "f_B"'] & F^n \arrow[u, "\Phi_n"']
\end{tikzcd}$$

We kunnen dit ook formuleren door te zeggen $f_B = \Phi_n^{-1} \circ f_A^\top \circ \Phi_m$.

De j-de kolom van $B = [f_A^\top]_{P_n}^{P_m}$ is gelijk aan

$$Be_j = f_B(e_j) = \Phi_n^{-1}\Big(f_A^\top\big(\Phi_m(e_j)\big)\Big).$$

Er geldt $\Phi_m(e_j) = p_j$, dus $(f_A^\top \circ \Phi_m)(e_j) = p_j \circ f_A$. Dit is de lineaire afbeelding $F^n \to F$ die $x \in F^n$ stuurt naar $p_j(Ax)$, de j-de coördinaat van Ax. Deze j-de coördinaat is het scalair product $\langle v_j, x\rangle$, waarbij v_j de j-de rij van A is. Er geldt dus $(f_A^\top \circ \Phi_m)(e_j) = p_j \circ f_A = \langle \_\,, v_j\rangle$. De afbeelding Φ_n^{-1} stuurt dit uiteraard naar v_j, dus $f_B(e_j) = v_j$. Dit betekent dat de j-de kolom van B inderdaad gelijk is aan de j-de rij van A, de $B = A^\top$. $\square$

Deze stelling is een speciaal geval van Stelling 6.13 uit het dictaat, maar Stelling 6.13 volgt uit dit speciale geval. Corollary 6.14 is weer een speciaal geval. Dit is hoever we zijn gekomen in het college.