Lineaire algebra 2: huiswerkset 2
(Secties 3 en 4)
Deadline: 8 oktober 2014, 9:00 uur

(H2.1)

1. Geef een voorbeeld van een positief geheel getal n en twee nilpotente $(n \times n)$-matrices A en B waarvoor het product AB *niet* nilpotent is.
2. Gegeven twee nilpotente $(n \times n)$-matrices A en B die commuteren (dat wil zeggen, $AB = BA$), laat zien dat AB nilpotent is.
3. Bestaat er een positief geheel getal n en een tweetal nilpotente $(n \times n)$-matrices A en B waarvoor AB inverteerbaar is? (bewijs je antwoord)

(H2.2) Zij f een endomorfisme van een n-dimensionale vectorruimte V met n verschillende eigenwaarden. Laat zien dat V precies 2^n deelruimtes heeft die f-invariant zijn.

(H2.3) Zij f een nilpotent endomorfisme van een 3-dimensionale $\mathbf{R}$-vectorruimte V. Laat zien dat f oneindig veel f-invariante deelruimtes heeft dan en slechts dan als geldt $f^2 = 0$.

(H2.4) Beschouw de reële matrices

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Schrijf C in blokdiagonaalvorm met blokken van grootte ≤ 2. Dat wil zeggen, geef matrices $A, Q \in \mathrm{Mat}(4, \mathbf{R})$ met Q inverteerbaar zó dat geldt $C = QAQ^{-1}$, waarbij A van de vorm

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & B_\ell \end{array}\right)$$

   is voor $(n_i \times n_i)$-matrices B_i met $n_i \leq 2$.

   Hint: $x^4 - 1 = (x+1)(x-1)(x^2+1)$. Je mag ook Lemma 5.1 gebruiken, ook al is dat nog niet in het college behandeld.

2. Schrijf de (nilpotente) matrix D in de standaardvorm voor nilpotente matrices. Dat wil zeggen, geef een inverteerbare matrix Q en een matrix A van de vorm in Remark 3.4 zó dat geldt $D = QAQ^{-1}$.