Extra opgaven bij het college Algebra 3

Opgave 1. Zij $K \subset L$ een uitbreiding met $[L : K] = 1$. Bewijs dat $L = K$.

Opgave 2. Bewijs dat complexe conjugatie een lichaamsautomorfisme is van $\mathbb{C}$ dat het deellichaam $\mathbb{R}$ invariant (d.w.z. elementsgewijs vast) laat.

Opgave 3. Zij σ een lichaamsautomorfisme van $\mathbb{R}$.
(i) Bewijs: als $x > 0$ dan is $\sigma(x) > 0$.
(ii) Bewijs dat σ de identiteit is.

Opgave 4. Bewijs dat $\mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$ een lichaam is met 9 elementen.
Bewijs dat $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ een lichaam is met 8 elementen.

Opgave 5. Bepaal het minimumpolynoom over $\mathbb{Q}$ van
(i) $3 + \sqrt{2}$;
(ii) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$;
(iii) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$;
(iv) $\sqrt{2 + 3\sqrt{3}}$.

Opgave 6. Bepaal het minimumpolynoom van $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ over
(i) $\mathbb{Q}$;
(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$;
(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$;
(iv) $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$.

Opgave 7. Laat α in een uitbreidingslichaam van $\mathbb{Q}$ gegeven zijn met minimumpolynoom X^3+X+1. Bepaal de minimumpolynomen van α^{-1} en van $\alpha-1$. Schrijf verder de elementen α^4, α^{-2} en $(\alpha^4 + 1)^{-1}$ uit op de basis $(1, \alpha, \alpha^2)$ van $\mathbb{Q}(\alpha)$ over $\mathbb{Q}$.

Opgave 8. Bewijs dat $\mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1)$ en $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ isomorfe lichamen zijn.

Opgave 9. Bewijs dat $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + X + 1)$ en $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$ niet isomorf zijn.

Opgave 10. Laat ρ een primitieve derdemachts-eenheidswortel zijn in $\mathbb{C}$. Bewijs dat $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\rho\sqrt[3]{2})$ en $\mathbb{Q}(\rho^2\sqrt[3]{2})$ onderling verschillende deellichamen van $\mathbb{C}$ zijn. Bewijs dat ze onderling isomorf zijn.

Opgave 11. Zij K een lichaam, en zij t een transcendent over K. Bewijs dat de algebraïsche afsluiting van K in $K(t)$ gelijk is aan K.

Opgave 12. Laat $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(\alpha)$ met $\alpha^2 + 1 = 0$.
(i) Bepaal de orde van α in $\mathbb{F}_9^*$.
(ii) Geef een voortbrenger β van $\mathbb{F}_9^*$.
(iii) Schrijf $-\alpha$ en $\alpha - 1$ als macht van β.
(iv) Schrijf β^5 en β^6 uit op de basis $(1, \alpha)$ van $\mathbb{F}_9$ over $\mathbb{F}_3$.
(v) Ontbind $X^9 - X$ in irreducibele factoren over $\mathbb{F}_3[X]$.
(vi) Geef voor elk element van $\mathbb{F}_9$ het minimumpolynoom over $\mathbb{F}_3$.
(vii) Beschrijf $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_9)$.

Opgave 13. Laat $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2(\alpha)$ met $\alpha^4 + \alpha + 1 = 0$.
(i) Bewijs dat α een voortbrenger is van $\mathbb{F}_{16}^*$.
(ii) Schrijf α^5 en α^6 uit op de basis $(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)$ van $\mathbb{F}_{16}$ over $\mathbb{F}_2$.
(iii) Ontbind $X^{16} - X$ in irreducibele factoren over $\mathbb{F}_2[X]$.
(iv) Beschrijf $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{16})$.

Opgave 14. Beschrijf $\mathbb{F}_p[X]/(X^2 + X + 1)$ voor $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$ Kun je een patroon ontdekken?

Opgave 15. Bewijs dat in een eindig lichaam elk element te schrijven is als som van twee kwadraten uit dat lichaam.

Opgave 16. Bewijs dat een eindig lichaam niet algebraïsch afgesloten is.

Opgave 17. Laat f een irreducibel monisch polynoom van graad 3 zijn in $\mathbb{F}_5[X]$ en α een nulpunt van f in een uitbreidingslichaam $\mathbb{F}_q$ van $\mathbb{F}_5$. Bewijs dat de multiplicatieve orde van α in $\mathbb{F}_q^*$ deelbaar is door 31.

Opgave 18. Bewijs dat $\cup_{i \geq 0} \mathbb{F}_{p^{i!}}$ een algebraïsche afsluiting is van $\mathbb{F}_p$.

Opgave 19. Laat K een lichaam van karakteristiek $p > 0$ zijn. Voor $a \in K$ noemen we $f = X^p - X - a$ in $K[X]$. Laat α een nulpunt van f zijn in een uitbreidingslichaam van K.
(i) Laat zien dat $f = \prod_{i \in \mathbb{F}_p} (X - \alpha - i)$.
(ii) Bewijs dat $K(\alpha)$ een ontbindingslichaam van f is.
(iii) Laat zien dat de irreducibele factoren van f in $K[X]$ dezelfde graad hebben.
(iv) Bewijs: f is irreducibel of splitst in lineaire factoren in $K[X]$.
(v) Laat zien dat $X^p - X - a$ irreducibel is in $\mathbb{F}_p[X]$ voor elke $a \in \mathbb{F}_p^*$.